

На правах рукописи

ЛЬВОВ Александр Геннадьевич

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ
ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

**Специальность: 08.00.13 – «Математические
и инструментальные методы экономики»**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата экономических наук

Уфа – 2012

Работа выполнена на кафедре экономико-математических методов и информационных технологий в ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Горбунов Владимир Константинович
кафедра экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВПО
«Ульяновский государственный университет»

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Спивак Семен Израилевич
кафедра математического моделирования ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

кандидат экономических наук, доцент

Ризванов Дмитрий Анварович
кафедра вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Ведущая организация: Экономический факультет Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится «15» мая 2012 года в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.09 при ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, Центр, ул. К. Маркса, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уфимского государственного авиационного технического университета.

Автореферат разослан «13» апреля 2012 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор экономических наук, профессор

М. К. Аристархова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Понятие производственной функции (ПФ) в XX-ом веке стало одним из базовых понятий экономической науки. Метод производственных функций можно отнести к высоким технологиям количественного экономического анализа. Он использовался в СССР в исследовательских работах и планировании на союзном, региональном и отраслевом уровнях и остается актуальным для новой экономики России. Изменение условий функционирования экономики и совершенствование методов ее исследования ставит новые задачи перед экономической наукой, в частности, требует *развития методов построения ПФ*.

В диссертации метод производственных функций развивается для более глубокого исследования эффектов замещения между производственными факторами (ресурсами) и разработки метода построения «капитальных» ПФ в условиях, когда вместо динамики капитала (производственных фондов) известна динамика производственных инвестиций. *Первую проблему* – замещение факторов – продуктивно изучать в классе однородных ПФ с переменной эластичностью замещения факторов. Такое представление ПФ известно в случае двухфакторных линейно однородных функций (представление Сато-Гоффмана, 1968). Но здесь требуется априорное задание зависимости эластичности замещения (труда – капиталом). Аналитического (формульно-параметрического) представления однородных ПФ с переменной эластичностью замещения для трех и более факторов автору не известно. Устранение этих ограничений расширит возможности математического моделирования производственных объектов и систем.

Вторая проблема возникает в ситуации, когда балансовая стоимость производственных фондов, в виду их незагруженности, не имеет смысла при построении ПФ для конкретных объектов, и требуется оценить реально используемые фонды. Некоторые современные исследователи используют так называемые «инвестиционные» ПФ, отличающиеся от традиционных «капитальных» функций простой заменой фактора «капитал» на текущие производственные инвестиции. Очевидно, такая замена фактора типа запаса (капитала) на фактор типа потока (инвестиции) не может быть продуктивной. Отсутствие в известной автору литературе работ, решающих отмеченные проблемы, обосновывает актуальность диссертации.

Разработанность темы исследования. К настоящему времени список литературы по производственным функциям представлен работами как отечественных, так и зарубежных авторов. Среди них можно выделить работы Н. Б. Баркалова, Г. Б. Клейнера, М. К. Плакунова и Р. Л. Раяцкаса, а так же Л. Л. Терехова. Проблемам построения производственных функций

в российской переходной экономике посвящена книга В. А. Бессонова (2002) и недавние (2007) диссертации Д. М. Галина и Сюань Яна.

Известные результаты представления однородных двухфакторных ПФ с переменной эластичностью замещения содержатся в трудах Н. Реванкара, Р. Сато и Р. Гофмана, Г. Б. Клейнера и Б. Н. Сироты.

Инвестиционные ПФ строятся В. А. Бессоновым, Сюань Яном и используются в теоретических работах С. К. Демченко, Ю. Лукашина и Л. Рахлиной. Работ, посвященных построению капитальных ПФ по информации об инвестициях, автору не известно. Оценка реально используемых фондов представляет собой специальную проблему, изучаемую рядом современных авторов: В. А. Бессонов, И. Б. Воскобойников, Г. И. Ханин, Д. А. Фомин.

Исходя из сказанного, **целью** данного диссертационного исследования является развитие методов построения производственных функций для более глубокого исследования эффектов замещения между производственными факторами и разработки метода построения капитальных ПФ по информации об инвестициях.

Объектом исследования является достаточно крупный производственный объект (фирма, объединение, отрасль, региональная или национальная экономика).

Предмет исследования – производственные процессы объекта исследования, в частности, процессы замещения производственных факторов.

В соответствии с целью в работе были поставлены следующие **задачи**:

- 1) предложить новый класс однородных многофакторных производственных функций с переменной эластичностью замещения;
- 2) разработать общую методiku поэтапного построения производственных функций на основе перехода от простых параметрических классов к более сложным;
- 3) разработать метод оценки параметров капитальных производственных функций и оценки реально используемых производственных фондов по информации о производственных инвестициях;
- 4) выполнить оценку реально используемых основных фондов для экономики России по информации об инвестициях в основной капитал.

Теоретической и методологической основой исследования явились труды отечественных и зарубежных авторов в области экономико-математического моделирования, производственных функций, экономической динамики, а также методы математической статистики и эконометрики, оптимизации, компьютерного программирования.

Информационной базой исследования послужили данные некоторых экономических объектов, представленные в научной литературе по изучае-

мой проблеме, а также официальные данные, публикуемые в изданиях Росстата.

Обработка статистической информации проводилась с использованием стандартных средств анализа данных MS Office и системы компьютерной математики «Mathematica».

Наиболее существенные **результаты работы**, обладающие научной новизной, состоят в следующем.

1. Введен класс многофакторных положительно однородных ПФ с переменной эластичностью замещения, более точно описывающий производственные объекты, чем известные ПФ с постоянной эластичностью замещения. В отличие от двухфакторных функций Сато–Гофмана, эластичность замещения для нового класса не задается априорно, а вычисляется в результате построения ПФ (п. 1.4 Паспорта ВАК специальности 08.00.13 – Разработка и исследование моделей и математических методов анализа микроэкономических процессов и систем ...).

2. Разработана методика поэтапного построения ПФ, заключающаяся в последовательном усложнении используемых ПФ, начиная с функции Кобба–Дугласа, и в передаче полученных значений параметров в качестве начальных для более сложной функции. Эта методика позволяет решать задачи оценивания параметров более сложных классов ПФ, наиболее полно представляющих сложные экономические процессы, в частности, замещения одних факторов другими (п. 1.1 Паспорта ВАК специальности 08.00.13 – Разработка и развитие математического аппарата анализа экономических систем ...).

3. Предложена модель оценки параметров капитальных ПФ методом наименьших квадратов по данным о производственных инвестициях. Эта модель позволяет оценить динамику реально используемых производственных фондов на промежутке наблюдения и преодолеть проблему информационного обеспечения для построения традиционных капитальных ПФ. Аналоги решения такой комплексной проблемы автору не известны (п. 1.4 Паспорта ВАК специальности 08.00.13).

4. Выполнена оценка реально используемых основных фондов, коэффициента амортизации и лага освоения инвестиций в основной капитал для экономики России на временном промежутке 2000–2008 гг. Результаты эксперимента позволили провести качественный и количественный анализ экономики России за рассматриваемый промежуток времени. (п. 1.7 Паспорта ВАК специальности 08.00.13 – Построение и прикладной экономический анализ экономических и компьютерных моделей ...).

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов

обеспечиваются:

- проверкой выработанных теоретических положений и практических результатов на конференциях, подтверждением в публикациях;
- успешной апробацией результатов исследования, которая доказала возможность их применения при моделировании реальных производственных объектов.

Теоретическая и практическая значимость диссертации. Полученные в диссертации результаты носят как общетеоретический, так и прикладной характер. Новый класс положительно однородных многофакторных ПФ с переменной эластичностью замещения может считаться новой моделью производственных объектов, позволяющей лучше отражать сложные экономические процессы замещения одних производственных факторов другими.

Метод построения традиционных капитальных ПФ по данным об инвестициях, в отличие от применяемых другими авторами инвестиционных ПФ, позволяет строить капитальные ПФ в условиях ненадежной информации о реально используемых производственных фондах. При этом оценка дополнительных параметров амортизации и лага освоения инвестиций также представляет углубленный анализ исследуемого объекта, позволяющий восстановить динамику реально используемых производственных фондов.

Таким образом, разработанные в диссертации методы и алгоритмы расширяют возможности применения метода ПФ для анализа производственных объектов и процессов, повышают его адекватность. Они могут быть использованы научными организациями и университетами, аналитическими службами государственного (федерального и регионального) управления, руководством больших фирм.

Апробация результатов исследования. Основные положения работы докладывались на научном семинаре кафедры математических методов анализа экономики Экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (руководители Ю. Н. Черемных и Б. Л. Воркуев, декабрь 2010 г.), а также на:

- 1) Третьей международной научной конференции «Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании» (Екатеринбург, УГТУ-УПИ, ноябрь 2008 г.);
- 2) Седьмой международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (Ульяновск, УлГУ, февраль 2009 г.);
- 3) Четвертой международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», посвящен-

ной памяти Е. В. Воскресенского (Саранск, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, август 2009 г.);

4) Всероссийской (с международным участием) конференции «От идеи академика С. С. Шаталина о системных подходах к экономике к саморазвивающимся социально-экономическим системам» (Екатеринбург, Институт экономики УрО РАН, сентябрь 2009 г.);

5) Первом Российском экономическом конгрессе (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, декабрь 2009 г.);

6) IV всероссийском симпозиуме по экономической теории (Екатеринбург, Институт экономики УрО РАН, июнь – июль 2010 г.);

7) I Всероссийском симпозиуме по региональной экономике (Екатеринбург, Институт экономики УрО РАН, июнь 2011 г.);

8) XV Байкальской международной школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения», посвященной памяти профессора В. П. Булатова (Иркутск, П. Листвянка, оз. Байкал, июнь 2011 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, общим объемом 4.09 печатных листов, в том числе 3 работы в периодических научных изданиях, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертации на соискание ученой степени кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация выполнена на 109 страницах, состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка использованной литературы, содержит 4 рисунка, 21 таблицу.

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель, задачи, объект и предмет исследования, определены позиции научной новизны, дан обзор диссертации по главам, сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** «*Метод производственных функций в экономическом анализе*» излагаются основные факты теории производственных функций, их характеристики и свойства. В первой части главы излагается история и развитие метода производственных функций, уточняется понятие производственной функции, приводятся примеры ПФ, используемые в математическом моделировании. Подробно анализируются процесс замещения производственных факторов и его количественные характеристики. Вторая часть посвящена практическому применению ПФ в экономико-математическом моделировании и проблемам их построения.

Во **второй главе** «*Однородные производственные функции с переменной эластичностью замещения*» вводится новый класс однородных производственных функций с переменной эластичностью замещения для любого числа факторов. Такой класс ПФ вводится как обобщение формулы

В. К. Горбунова для представления вогнутых линейно однородных функций, определенных в неотрицательном ортанте пространства аргументов (производственных факторов), через базовые функции, которые неотрицательны и вогнуты на стандартном симплексе. Новый класс охватывает все типы зависимости прироста выпуска от увеличения масштаба затрат (убывание, постоянство, возрастание), что расширяет возможности моделирования конкретных объектов. При этом возникает проблема эффективного вычисления переменных эластичностей замещения. Соответствующий алгоритм вычисления эластичностей разработан. Здесь также предлагается методика поэтапного построения ПФ, заключающаяся в последовательном усложнении используемых ПФ, начиная с функции Кобба–Дугласа, и в передаче полученных значений параметров в качестве начальных для более сложной функции. Приводятся результаты оценки параметров производственных функций для двух реальных экономических объектов разного типа.

В **третьей главе** «*Построение производственных функций по данным об инвестициях с оценкой реально используемых фондов*» предлагается метод построения капитальных производственных функций, один из факторов которых – стоимость используемых фондов, формируемая по информации о производственных инвестициях. При этом вводится уравнение динамики капитала (производственных фондов) на промежутке наблюдения с учетом его амортизации и лага освоения инвестиций. Параметры режима амортизации и задержки освоения инвестиций оцениваются вместе с параметрами ПФ. Для решения сложной задачи минимизации невязки расчетных и фактических значений выпуска с учетом динамики фондов предложен специальный вариант метода продолжения по параметру. Представлены результаты построения инвестиционной и капитальных ПФ по двум тестам и реальным статистическим данным российской экономики.

В **заключении** сформулированы основные выводы и результаты исследования.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Введен класс многофакторных положительно однородных ПФ с переменной эластичностью замещения, более точно описывающий производственные объекты, чем известные ПФ с постоянной эластичностью замещения. В отличие от двухфакторных функций Сато – Гофмана, эластичность замещения для нового класса не задается априорно, а вычисляется в результате построения ПФ.

Под *производственной функцией* будем понимать функцию $F(x)$, отображающую неотрицательные затраты производственных факторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ из некоторой «экономической» области $G \subseteq R_+^n$ (неотрицательный ортант) в значение валового выпуска Y , т. е.

$$Y = F(x), \quad x \in G. \quad (1)$$

Основными аналитическими свойствами ПФ являются: непрерывность, неотрицательность и возрастание в области G . Дополнительными характеристиками, упрощающими анализ, являются: дифференцируемость, положительная или линейная однородность, вогнутость или квазивогнутость.

Напомним, что $F(x)$ называется *положительно однородной* функцией степени μ , если для любого вектора x и скаляра $t \geq 0$ она удовлетворяет соотношению

$$F(tx) = t^\mu F(x).$$

Положительно однородная функция степени $\mu = 1$ называется *линейно-однородной*. Функция $F(x)$ называется *квазивогнутой* в области G , если ее множества уровней

$$L_F(C) = \{x \in G : F(x) \geq C\}$$

выпуклые для любых значений C .

Для описания методов построения ПФ также используется эквивалентная запись $F(x; w)$, где $w = (w_1, \dots, w_m)$ – вектор параметров функции. На параметры w накладываются условия (если это возможно), обеспечивающие требуемые аналитические свойства.

В представлении (1) заложена возможность замещения одних производственных факторов другими, т. е. возможность выпуска одного и того же объема продукции при разных сочетаниях количеств факторов. Изучение этого процесса является одной из главных целей моделирования производства с помощью ПФ. Первичной характеристикой замещения факторов

является *предельная норма замещения* (ПНЗ) фактора x_i фактором x_j

$$S_{ij}(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} : \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}, \quad (2)$$

приблизительно показывающая, в каком отношении нужно увеличить фактор x_j , чтобы компенсировать уменьшение фактора x_i на малую величину при условии, что остальные факторы и выпуск продукции остаются неизменными.

Более глубокий анализ замещения одного фактора другим проводится при помощи понятия *эластичности замещения факторов*

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{S_{ij}(x)}{x_j/x_i} \cdot \frac{\partial (x_j/x_i)}{\partial S_{ij}(x)} = \frac{\partial \ln(x_j/x_i)}{\partial \ln(S_{ij}(x))}, \quad (3)$$

где производная берется вдоль изокванты, определяемой уравнением $F(x) = const$. Эластичность замещения является характеристикой второго порядка и служит количественной характеристикой скорости изменения ПНЗ (2) вдоль изокванты.

Наиболее известными ПФ являются: функция *Кобба – Дугласа* (КД)

$$F(x) = A \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad (A, \alpha) > 0, \quad (4)$$

функция с *постоянной эластичностью замещения факторов* (ПЭЗ)

$$F(x) = A \left(\sum_{i=1}^n \nu_i x_i^{-\rho} \right)^{-\mu/\rho}, \quad (A, \mu, \nu) > 0, \quad \sum_{i=1}^n \nu_i = 1, \quad -1 \leq \rho \neq 0 \quad (5)$$

и функция *Солоу*¹

$$F(x) = A \left(\sum_{i=1}^n \nu_i x_i^{\alpha_i} \right)^{\gamma}, \quad (A, \nu) > 0, \quad \sum_{i=1}^n \nu_i = 1, \quad (6)$$

с ненулевыми степенями (α, γ) . При построении функции (6) для реального экономического объекта требуется обеспечивать свойства монотонности и, возможно, квазивогнутости. Это нетривиальная проблема и ее аналитическое решение в виде явных условий на коэффициенты неизвестно.

Функция КД (4) имеет постоянную эластичность замещения $\sigma_{ij}(x) \equiv \sigma = 1$. Функция ПЭЗ (5) имеет произвольную постоянную эластичность

¹В литературе чаще всего функция Солоу задается без внешнего параметра A и с ограничениями на неравенство параметров нулю. Используемое нами представление эквивалентно.

замещения $\sigma_{ij}(x) \equiv \sigma = 1/(1 + \rho)$. Обе эти функции однородные. Степень однородности функции КД $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ и функции ПЭЗ равна μ .

Предположение о постоянстве эластичностей замещения факторов (3), как отмечалось выше, ограничивает возможность использования метода производственных функций для адекватного анализа реальных производственных объектов и процессов. Функция Солоу имеет переменную эластичность замещения, но она в общем случае неоднородная, что делает ее в случаях, когда предположение однородности обосновано, чрезмерно сложной. Таким образом, для метода ПФ представляет интерес аналитическое описание класса положительно однородных ПФ с переменной эластичностью замещения.

В. К. Горбуновым (1999 г.) найдено следующее аналитическое представление класса линейно однородных неотрицательных вогнутых функций, определенных на неотрицательном ортанте R_+^n пространства R^n , через произвольные неотрицательные вогнутые функции, определенные на стандартном симплексе

$$S^n = \{x \geq 0 : \langle x \rangle = 1\}, \text{ где } \langle x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Любая неотрицательная, линейно однородная и вогнутая на ортанте R_+^n функция $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = \langle x \rangle v \left(\frac{x}{\langle x \rangle} \right), \quad (7)$$

где $v(y)$, $y \in R_+^n$ – некоторая вогнутая и неотрицательная на симплексе S^n функция.

Класс функций (7) с дополнительным свойством дифференцируемости, очевидно, можно использовать в качестве *классических* ПФ (вогнутых и линейно однородных). Однако такие функции представляют производство лишь с *постоянной отдачей от масштаба*. Для охвата также случаев *убывающей и возрастающей отдачи от масштаба* и сохранения свойства *положительной однородности* вводится следующее обобщение класса (7):

$$F_\mu(x) = \langle x \rangle^\mu v \left(\frac{x}{\langle x \rangle} \right), \quad \mu \geq 0. \quad (8)$$

Функции $F_\mu(x)$ неотрицательные и положительно однородные степени μ в R_+^n . Они представляют новый класс многофакторных положительно однородных производственных функций. Такие функции возрастают вдоль любого луча $\{x = tx^0 : t > 0, x^0 \geq 0\}$ как степенные функции:

$F_\mu(tx^0) = t^\mu F_\mu(x^0)$. Соответственно, отдача от масштаба будет убывающей при $\mu < 1$, постоянной при $\mu = 1$ и возрастающей при $\mu > 1$. Эластичности замещения для функций (8) являются в общем случае переменными. Это существенно расширяет возможности моделирования производственных процессов в предположении их положительной однородности.

Произвол выбора базовых функций $v(y)$ должен быть согласован с возможностью идентификации, определяемой статистической базой об использовании факторов производства и соответствующих выпусках. В диссертации представление (8) использовалось для подкласса VESS, порождаемого функциями Солоу (6) в качестве $v(y)$, и подкласса VESQ, порождаемого вогнутыми квадратичными функциями

$$v(y) = \alpha + \langle c, y \rangle + \langle Qy, y \rangle \quad (9)$$

с отрицательно определенными матрицами $Q = \{q_{ij}\}$. В обоих случаях выбор параметров базовых функций ограничен условиями их вогнутости и неотрицательности на симплексе S^n . Для функций (9) отрицательная определенность матрицы Q обеспечивается критерием Сильвестра в виде соответствующих детерминантных неравенств. Класс базовых функций (9) является более гибким, чем класс Солоу, так как определяется большим числом параметров.

Приведем пример вогнутой линейно-однородной функции (7) с базовой функцией (9) в случае двух факторов. В этом случае

$$v(y) = \alpha + c_1 y_1 + c_2 y_2 + q_{11} y_1^2 + 2q_{12} y_1 y_2 + q_{22} y_2^2, \quad (10)$$

и функция (7) имеет вид

$$F(x) = \frac{(\alpha + c_1 + q_{11}) x_1^2 + (2\alpha + c_1 + c_2 + 2q_{12}) x_1 x_2 + (\alpha + c_2 + q_{22}) x_2^2}{x_1 + x_2}.$$

Зададим значения параметров функции (10):

$$\alpha = 1, \quad c = (2, 1), \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix}.$$

С данными параметрами функция

$$v(x) = 1 + 2x_1 + x_2 - 2x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 \quad (11)$$

строго вогнута. Соответствующая линейно-однородная функция (7) имеет вид

$$F(x) = \frac{x_1^2 + 6x_1 x_2 + x_2^2}{x_1 + x_2}. \quad (12)$$

Изокванты функций (11) и (12) представлены на рисунке 1.

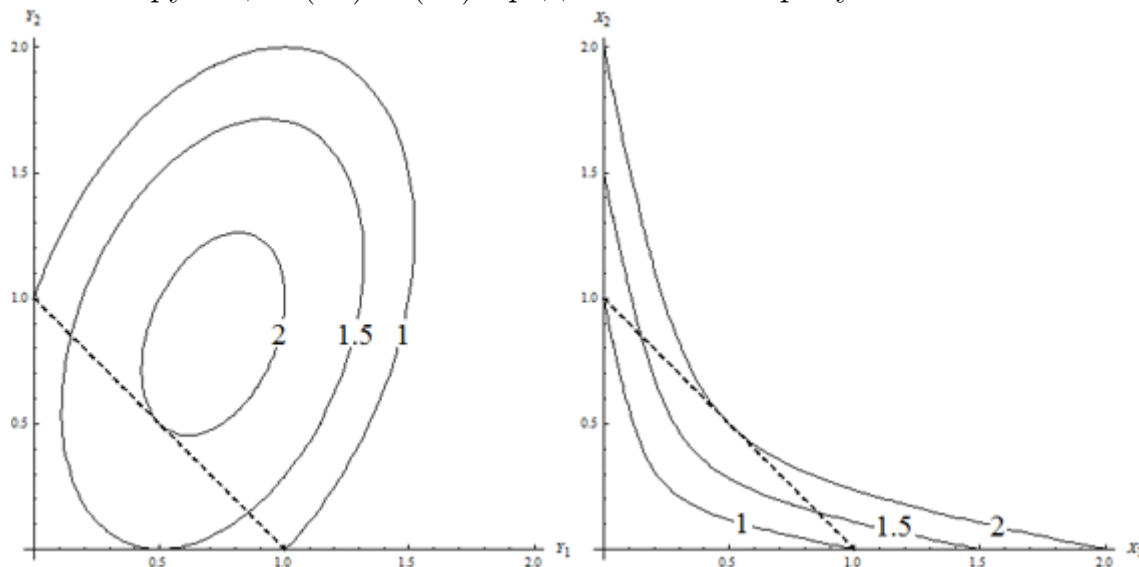


Рис. 1: Изокванты функций (11) (слева) и (12) (справа)

В диссертации также приведены другие примеры, в частности, для трех факторов. Новый класс производственных функций (8) расширяет возможности моделирования реальных экономических объектов. Однако возникает проблема эффективного вычисления переменных эластичностей замещения факторов (3). В однородном случае ПНЗ (2) и эластичности замещения являются функциями от пропорций соответствующих пар факторов $\xi_{ji} = x_j/x_i$, $i \neq j$, т. е. функциями $S_{ij}(\xi^i)$ и $\sigma_{ij}(\xi^i)$ соответственно, где $\xi^i = (\xi_{1i}, \dots, \xi_{i-1,i}, \xi_{i+1,i}, \dots, \xi_{ni})$. Для непосредственного вычисления эластичностей замещения требуется решение систем нелинейных уравнений. В диссертации приводится алгоритм вычисления эластичностей замещения, использующий вместо этого линейные уравнения в вариациях.

2. Разработана методика поэтапного построения ПФ, заключающаяся в последовательном усложнении используемых ПФ, начиная с функции Кобба–Дугласа, и в передаче полученных значений параметров в качестве начальных для более сложной функции. Эта методика позволяет решать задачи оценивания параметров более сложных классов ПФ, наиболее полно представляющих сложные экономические процессы, в частности, замещения одних факторов другими.

Классический метод построения ПФ $F(x; w)$ по статистическим данным

$$\{Y_t, x^t : t = \overline{1, T}\} \quad (13)$$

основан на методе наименьших квадратов (МНК) с поиском ПФ в некотором

параметрическом классе. Для рассматриваемой проблемы МНК заключается в нахождении параметров \hat{w} из условия минимизации суммы квадратов невязок $\varphi(w)$ на допустимом множестве W :

$$\varphi(w) = \sum_{t=1}^T [Y_t - F(x^t; w)]^2 \rightarrow \min_W. \quad (14)$$

В общем случае задача построения ПФ относится как к нелинейному регрессионному анализу, так и к задаче изогеометрической аппроксимации функции с заданными аналитическими свойствами. Эти свойства должны обеспечиваться условиями $w \in W$.

Задачи МНК для классов функций, более сложных чем класс функций КД, являются существенно нелинейными. Целевая функция (14) может иметь «овражный» характер и иметь неединственный минимум. Методы решения таких задач наиболее эффективны в случае хорошего начального приближения оцениваемых параметров w , которое трудно определить для сложных классов функций. Для преодоления трудностей минимизации соответствующих функций невязки $\varphi(w)$ (14) требуется специальная методика. В диссертации предлагается два метода поэтапного решения сложных нелинейных задач класса (14). Первый метод заключается в поэтапном переходе от относительно простого класса функций (начиная с класса функций КД) к более сложному с использованием результатов оценивания параметров более простой функции. Он описан и реализован во второй главе диссертации. Вторым методом является спецификация метода продолжения по параметру. Он описан и реализован в третьей главе диссертации.

В качестве статистических критериев качества используются:

- 1) значение суммы квадратов невязок $\varphi(w)$ (14);
- 2) коэффициент детерминации R^2 ;
- 3) критерий Дарбина – Уотсона DW ;
- 4) максимальная относительная невязка

$$\delta Y = \max_t \frac{|r_t|}{Y_t}, \quad \text{где } r_t = Y_t - F(x^t; \hat{w}), \quad t = \overline{1, T}.$$

В диссертации традиционные производственные функции (4), (5), (6), а также однородные ПФ с переменной эластичностью замещения из нового параметрического класса (8) на базе функций (6) и (9) строились для случая двух и трех факторов по статистическим данным двух различных экономических объектов. В случае двух факторов также строилась функция Реванкара (Revankar, 1971) с целью сравнения ее эластичностей замещения со значениями, полученными благодаря новому представлению (8). Все расчеты

реализованы с помощью системы компьютерной математики «Mathematica». Рассмотрим полученные результаты в случае трех факторов для некоторого производственного объединения за период с 1972–1986 г. (таблица 1). Данные взяты из книги Г. Б. Клейнера «Производственные функции: Теория, методы, применение» (1986). Обозначения: Y_t – выпуск, x_1 – основные средства, x_2 – оборотные средства, x_3 – численность персонала.

Таблица 1: Статистика производственного объединения

Год t	Y_t	x_1^t	x_2^t	x_3^t
1972	38.2	15.3	11.2	3.9
1973	43.5	15.9	12.1	4.2
1974	44.5	17.1	12.8	4.4
1975	47.8	18.8	13.3	4.6
1976	52.0	19.9	14.1	4.7
1977	54.6	21.2	14.9	4.9
1978	57.8	23.6	15.7	5.1
1979	60.4	25.3	16.8	5.2
1980	66.1	27.2	18.1	5.4
1981	70.7	30.6	19.1	5.5
1982	76.7	33.5	21.5	5.7
1983	80.2	35.8	22.3	5.7
1984	84.7	37.0	24.7	5.8
1985	87.0	39.2	25.6	6.0
1986	92.2	42.0	27.0	6.0

Получены следующие результаты.

1. Функция КД (4).

Начальное приближение $w^0 = (A^0, \alpha^0) = (3.236, 0.184, 0.457, 0.641)$.

Полученные оценки: $\hat{w} = (\hat{A}, \hat{\alpha}) = (3.495, 0.322, 0.353, 0.502)$. Степень однородности $\hat{\mu} = 1.178$.

Критерии качества: $\varphi(\hat{w}) = 8.84109$, $R^2 = 0.997$, $DW = 2.442$, $\delta Y = 0.026$.

2. Функция ПЭЗ (5).

Начальное приближение $w^0 = (A^0, \nu^0, \mu^0, \rho^0) = (3.495, 0.273, 0.299, 0.42, 1.178, 0.0001)$.

Получены оценки: $\hat{w} = (\hat{A}, \hat{\nu}, \hat{\mu}, \hat{\rho}) = (3.473, 0.2778, 0.3047, 0.4174, 1.17, 0.022)$.

Критерии качества: $\varphi(\hat{w}) = 8.841$, $R^2 = 0.997$, $DW = 2.443$, $\delta Y = 0.026$.

Для этой функции эластичность замещения равна

$$\sigma = \frac{1}{1 + \hat{\rho}} = 0.977.$$

3. Функция Солоу (6).

Начальное приближение $w^0 = (A^0, \nu^0, \alpha^0, \gamma^0) = (3.473, 0.2778, 0.304, 0.417, -0.022, -0.022, -0.022, -53.5)$

Получены оценки: $\hat{w} = (\hat{A}, \hat{\nu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}) = (0.095, 0.9384, 0.0497, 0.0118, -0.001, -0.635, -0.101, -136.073)$.

При таком наборе параметров выполняются основные аналитические свойства ПФ (положительность, возрастание, квазивогнутость) во всех наблюдаемых точках из таблицы 1.

Критерии качества: $\varphi(\hat{w}) = 7.917$, $R^2 = 0.998$, $DW = 2.45$, $\delta Y = 0.024$.

4. Функция VESQ (8) с базовой функцией (9).

Получены оценки: $\hat{w} = (\hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{Q}, \hat{\mu})$: $\hat{\alpha} = 1.351$, $\hat{c} = (1.355, 0.531, 6.24)$, $\hat{\mu} = 1.181$,

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} -2.69 & -1.007 & -5.69 \\ -1.007 & -5.317 & 6.673 \\ -5.69 & 6.673 & -27.73 \end{pmatrix}.$$

Критерии качества: $\varphi(\hat{w}) = 8.338$, $R^2 = 0.998$, $DW = 2.526$, $\delta Y = 0.024$.

Для этой функции в таблице 2 приведены значения эластичностей замещения факторов в окрестностях некоторых точек $x^t = (x_1^t, x_2^t, x_3^t)$ из таблицы 1, соответствующих определенному уровню выпуска Y_t .

Таблица 2: Значения эластичностей замещения функции VESQ.

$\sigma_{ij}(\xi^i) \setminus x^t$	(15.9, 11.2, 3.9)	(25.3, 16.8, 5.2)	(42, 27, 6)
$\sigma_{12}(\xi_{21}, \xi_{31})$	1.242	0.768	0.055
$\sigma_{13}(\xi_{21}, \xi_{31})$	4.978	6.742	12.577
$\sigma_{21}(\xi_{12}, \xi_{32})$	4.953	5.472	7.22
$\sigma_{23}(\xi_{12}, \xi_{32})$	1.268	2.056	5.413
$\sigma_{31}(\xi_{13}, \xi_{23})$	6.372	7.601	12.494
$\sigma_{32}(\xi_{13}, \xi_{23})$	-0.15	-0.073	0.139

5. Функция VESS (8) с базовой функцией (6).

Начальное приближение $w^0 = (A^0, \nu^0, \alpha^0, \gamma^0, \mu^0) = (0.095, 0.938, 0.049, 0.012, -0.001, -0.635, -0.101, -136.1, 1.177)$.

Получены оценки: $\hat{w} = (\hat{A}, \hat{\nu}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\mu}) = (0.108, 0.683, 0.316, 2.4 \times$

$10^{-4}, 0.032, 0.042, -1.117, -64.724, 1.222$).

Критерии качества: $\varphi(\hat{w}) = 8.517, R^2 = 0.997, DW = 2.455, \delta Y = 0.023$.

Для этой функции эластичности замещения представлены в таблице 3.

Таблица 3: Значения эластичностей замещения функции VESS.

$\sigma_{ij}(\xi^i) \setminus x^t$	(15.9, 11.2, 3.9)	(25.3, 16.8, 5.2)	(42, 27, 6)
$\sigma_{12}(\xi_{21}, \xi_{31})$	- 0.147	- 0.277	- 0.32
$\sigma_{13}(\xi_{21}, \xi_{31})$	3.066	1.783	0.866
$\sigma_{21}(\xi_{12}, \xi_{32})$	- 0.36	- 0.332	- 0.315
$\sigma_{23}(\xi_{12}, \xi_{32})$	3.278	1.838	0.861
$\sigma_{31}(\xi_{13}, \xi_{23})$	1.025	0.689	0.309
$\sigma_{32}(\xi_{13}, \xi_{23})$	1.893	0.816	0.237

Результаты численных экспериментов подтверждают, что новый параметрический класс положительно однородных ПФ с переменной эластичностью замещения достаточно богат и более адекватен (согласно принятым статистическим критериям качества) для моделирования производственных объектов по сравнению с традиционными ПФ (4),(5) с постоянной эластичностью замещения. Он определяется аналитическим представлением (8), где в качестве порождающих функций можно выбирать произвольные вогнутые и положительные на симплексе S_n функции. Однако эластичность замещения очень чувствительна относительно выбора параметрического класса порождающей функции. Из этого можно сделать вывод, что для выбора более адекватной функции необходимо внесение дополнительной информации о поведении эластичности замещения для изучаемого объекта. Такая информация требует более полной статистической базы, на основе которой можно построить хотя бы грубые оценки зависимости ПНЗ от пропорций используемых факторов.

3. Предложена модель оценки параметров капитальных ПФ методом наименьших квадратов по данным о производственных инвестициях. Эта модель позволяет оценить динамику реально используемых производственных фондов на промежутке наблюдения и преодолеть проблему информационного обеспечения для построения традиционных капитальных ПФ. Аналоги решения такой комплексной проблемы автору не известны.

Ограничимся проблемой построения наиболее распространенных двухфакторных ПФ вида

$$Y = F(K, L; w), \quad (15)$$

где Y – стоимость валового выпуска исследуемого производственного объекта, определяемая факторами: K – стоимость производственных фондов (капитал), L – затраты труда.

Далее функции класса (15) будем называть *капитальными*. В последнее десятилетие в экономический анализ введены ПФ, где вместо капитала K берутся инвестиции I в основной капитал. Соответствующие функции

$$Y = F(I, L; w) \quad (16)$$

будем называть *инвестиционными*.

Стандартная задача построения ПФ (15) решается на основе наблюдения значений выпуска и производственных факторов

$$\{Y_t, K_t, L_t : t = \overline{1, T}\}. \quad (17)$$

Однако, как отмечено выше, в современных условиях информация об используемом капитале $\{K_t\}$ или недостоверна, или неадекватна понятию ПФ (балансовые фонды). Относительно надежная производственная статистика исследуемых объектов последних лет обычно содержит данные о выпуске Y_t , инвестициях I_t , и затратах труда L_t :

$$\{Y_t, I_t, L_t : t = \overline{1, T}\}. \quad (18)$$

Оценка параметров инвестиционных функций (16) по данным (18) проводится с помощью МНК так же, как и оценка параметров капитальных функций (15) по данным (17).

Построение более адекватных стандартных капитальных функций (15) по данным (18) возможно в силу того, что накопленный капитал K_t зависит от инвестиций, сделанных к настоящему моменту, и от процесса его выбытия (амортизации). Для формирования показателей K_t следует описать их динамику.

В общем случае для освоения инвестиций требуется время, и капитализация инвестиций происходит за несколько периодов наблюдений. Примем обычное упрощающее предположение о постоянстве *нормы амортизации* (depreciation rate), обозначив ее δ , и будем считать, что прирост капитала определяется инвестициями текущего и предыдущего периодов в некоторой пропорции. Введем коэффициент $\xi \in [0, 1]$, обозначающий долю инвестиций, освоенных в текущем периоде. При этом уравнение динамики фондов будет иметь вид

$$K_t = (1 - \delta) K_{t-1} + \xi I_t + (1 - \xi) I_{t-1}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (19)$$

Для определения величин $\{K_1, \dots, K_T\}$ следует задать начальное значение запаса капитала K_0 и инвестиции периода, предшествующего наблюдениям, т. е. I_0 . Теперь динамика капитала определяется, кроме известных на расширенном промежутке наблюдения значений инвестиций $\{I_0, \dots, I_T\}$, также неизвестными – начальным капиталом K_0 , нормой амортизации δ и коэффициентом ξ . Соответственно, значения K_t являются функциями новых параметров $K_t = K_t(K_0, \delta, \xi)$ и список оцениваемых параметров расширяется до вектора $z = (w_1, \dots, w_m, K_0, \delta, \xi)$. Это усложняет задачу, но делает ее более адекватной проблеме моделирования производства и позволяет оценить реально используемый капитал.

Таким образом, задача оценивания параметров капитальной ПФ (15) и реконструкции динамики капитала (19) по данным (18) заключается в минимизации функции

$$\psi(z) = \sum_{t=1}^T [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \quad (20)$$

при условии (19) и ограничениях на параметры z :

$$w \in W, \quad K_0 > 0, \quad \delta > 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (21)$$

Параметры K_0 , δ и ξ , найденные таким способом, определяют динамику реально используемого капитала.

Легко увидеть, что восстанавливаемые значения капитала (19) при $\xi = 1$ и $\delta \uparrow 1$ (односторонний предел слева) принимают значения инвестиций I_t , и капитальная функция (15) совпадает на статистических данных (18) с инвестиционной функцией (16). Это значит, что капитальная и инвестиционная функции идентичны, если инвестиции осваиваются быстро – за один период ($\xi = 1$) и введенные фонды работают один период ($\delta = 1$). Соответственно, задача построения инвестиционной ПФ (16) по данным (18) – это частный случай новой задачи (19)–(21) для капитальной ПФ (15) при $\delta = \xi = 1$.

Рекуррентное уравнение (19) можно записать в конечной форме, исключая для каждого значения $t > 1$ промежуточные значения K_1, \dots, K_{t-1} :

$$K_t = K_0 (1 - \delta)^t + \xi \sum_{i=1}^t I_i (1 - \delta)^{t-i} + (1 - \xi) \sum_{i=0}^{t-1} I_i (1 - \delta)^{t-i-1}, \quad (22)$$

где $t = \overline{1, T}$. Эти формулы можно использовать вместо условий (19) при минимизации функции (20).

Описанный метод построения капитальной ПФ, очевидно, применим для функций с любым числом факторов, среди которых есть капитал.

Задача минимизации (20) при условиях (19) (или (22)) и (21) существенно нелинейная относительно оцениваемых параметров. Правые части выражений (22) содержат высокие степени выражений $(1 - \delta)$. Это влечет плохую обусловленность минимизируемой функции (20) и возможную многоэкстремальность задачи минимизации. Успех поиска минимизирующего набора $\hat{z} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m, \hat{K}_0, \hat{\delta}, \hat{\xi})$ в таком случае зависит от хорошего начального приближения параметров $z^0 = (w_1^0, \dots, w_m^0, K_0^0, \delta^0, \xi^0)$. Такое допустимое начальное приближение будем называть *экспертным*.

Для решения поставленной задачи предлагается специальный вариант известного итеративного *метода продолжения* (Continuation Method) для решения систем нелинейных уравнений. Аналогично стандартной схеме метода продолжения для нашей экстремальной задачи вводится параметр λ , меняющийся от нуля до единицы и определяющий семейство вспомогательных задач так, что при $\lambda = 0$ задача имеет простой вид с известным решением, а при $\lambda = 1$ – принимает исходный вид. При переходе к новому (возрастающему) значению λ с достаточно малым шагом решение, полученное на предыдущем шаге, принимается за начальное приближение решения новой задачи минимизации того же класса, но с новыми данными, мало отличающимися от предыдущих.

Опишем *алгоритм метода продолжения по параметру λ* , введя счетчик итераций k . Для краткости задачу минимизации (20) при условиях (21) и (22) с различными на каждой итерации данными будем обозначать задачей (20). Решение задачи на k -ой итерации обозначим $z^k = (w_1^k, \dots, w_m^k, K_0^k, \delta^k, \xi^k)$ и соответствующие выпуски обозначим $Y_t^k = F(K_t, L_t; w^k)$, $t = \overline{1, T}$.

Алгоритм (метод продолжения по параметру λ).

Шаг 0. Полагаем $k = 0$, $\lambda_0 = 0$, выбираем экспертное приближение вектора параметров $z^0 = (w_1^0, \dots, w_m^0, K_0^0, \delta^0, \xi^0)$, вычисляем условные выпуски $Y_t^0 = F(K_t, L_t; w^0)$, $t = \overline{1, T}$ (задача (20) с такими выпусками имеет очевидное решение z^0).

Шаг 1. Полагаем $k := k + 1$, присваиваем параметру λ_k некоторое умеренно большее значение и решаем задачу (20) с выпусками $Y_t^k = (1 - \lambda_k) Y_t^{k-1} + \lambda_k Y_t$, $t = \overline{1, T}$ и начальным приближением искомых параметров z^k , равным z^{k-1} .

Шаг 2. Вычисления шага 1 повторяются до некоторой итерации $k = N$, на которой $\lambda_N = 1$. При этом $Y_t^N = Y_t$, т. е. условные выпуски становятся реальными статистическими выпусками, и соответствующая оценка параметров принимается за решение основной задачи минимизации (20) при условиях (21) и (22): $\hat{z} = z^N$.

Приращения параметра λ_k выбираются так, чтобы решения задач (20) достигались с требуемой точностью (например, по малости приращений аргументов в процедуре минимизации) и параметр продолжения $\lambda_N = 1$ – за конечное число итераций.

Разумеется, данный алгоритм нуждается в обосновании сходимости, т. к. последовательность параметров продолжения λ_k , при которых каждая новая задача минимизации невязки решается с требуемой точностью, может расти очень медленно. Это специальная сложная проблема вычислительной математики. Метод продолжения по параметру обоснован для широкого класса вычислительных задач и по литературным данным обеспечивает во многих случаях нахождение глобального минимума многоэкстремальных задач.

Изложенная методика построения ПФ апробирована на симулированных данных с заранее известными «истинными» зависимостями (15) и динамикой реально используемых фондов (22), а также на официальных статистических данных российской экономики. Все расчеты реализованы в программной системе «Mathematica».

4. Выполнена оценка реально используемых основных фондов, коэффициента амортизации и лага освоения инвестиций в основной капитал для экономики России на временном промежутке 2000 – 2008 гг. Результаты эксперимента позволили провести качественный и количественный анализ экономики России за рассматриваемый промежуток времени.

Для построения инвестиционной и капитальных ПФ экономики России и оценки реально используемых основных фондов использовались официальные данные 2000–2008 г. из «Российского статистического ежегодника» за 2001–2009 гг. В этом сборнике приведены стоимостные показатели валового внутреннего продукта (ВВП), балансовых основных фондов на начало года и годовых инвестиций в основной капитал в текущих ценах, а также среднегодовая численность занятых в экономике. Они представлены в таблице 4 (источник: Рос. стат. ежегодник, 2009: табл. 5.5, 11.1, 11.23, 23.2).

Таблица 4: ВВП, фонды, инвестиции в текущих ценах (трлн. руб.) и численность занятых (млн. чел.)

Год t	Y_t	K_t	I_t	L_t
2000	7.306	16.605	1.165	64.5
2001	8.944	20.241	1.505	65.0
2002	10.831	24.431	1.762	65.6

Таблица 4 – Продолжение

Год t	Y_t	K_t	I_t	L_t
2003	13.243	30.329	2.186	66.0
2004	17.048	32.541	2.865	66.4
2005	21.625	38.366	3.611	66.8
2006	26.903	43.823	4.730	67.2
2007	33.111	54.252	6.716	68.0
2008	41.668	64.553	8.765	68.5

Эта информация достаточна для решения поставленной задачи (20), но стоимостные показатели необходимо привести к сопоставимым ценам, например, – базового года 2000. Для этого использовались также доступные данные о годовых индексах (в сопоставимых ценах) перечисленных стоимостных показателей, представленные в таблице 5.

Таблица 5: Годовые индексы ВВП, фондов и инвестиций и значения в ценах 2000 года (трлн. руб.)

Год t	Y_t/Y_{t-1}	K_t/K_{t-1}	I_t/I_{t-1}	ВВП Y_t	Инвестиции I_t
2000	1.100	1.001	1.174	7.306	1.165
2001	1.051	1.009	1.100	7.678	1.282
2002	1.047	1.010	1.028	8.039	1.318
2003	1.073	1.013	1.125	8.626	1.482
2004	1.072	1.016	1.137	9.247	1.685
2005	1.064	1.019	1.109	9.839	1.869
2006	1.077	1.024	1.167	10.596	2.181
2007	1.081	1.031	1.227	11.455	2.676
2008	1.056	1.036	1.098	12.096	2.939

По этим индексам были сформированы соответствующие индексы относительно базового 2000 г. Индексы основных фондов брались в среднем за год (среднее двух значений соседних лет на начало года). На основе этих индексов и начальных (на 2000 г.) значений стоимостных показателей сформированы абсолютные значения стоимостных показателей в ценах 2000 г., представленные, кроме основных фондов, в таблице 5. Ввиду высокой степени незагруженности фондов, находящихся на балансе многих предприятий, данные относительно балансовых фондов не должны использоваться для построения капитальных функций. Результаты построения капитальных ПФ, приведенные в таблице 6 (критерии качества и параметры) и таблице 7 (реально используемые фонды), получены нашим методом без использования

балансовых фондов. Соответствующие скорректированные данные (балансовых фондов) приводятся в таблице 7 для сравнения с получаемыми оценками реально используемых основных фондов.

По данным о ВВП и инвестициям (таблица 5), значению инвестиций в предшествующем году $I_{1999} = 0.993$ и численности занятых (таблица 4), построены инвестиционная (16) и капитальная (15) производственные функции класса КД (4), а также капитальные функции ПЭЗ (5), Солоу (6) и функция Джири²:

$$Y = A(K - K^*)^{\alpha_1} (L - L^*)^{\alpha_2}. \quad (23)$$

Оценены уровень амортизации фондов, скорость освоения инвестиций и реально используемые основные фонды на периоде наблюдения.

Получены следующие результаты. Оценки параметров функций:

- 1) Инвестиционная КД (16): $\hat{A} = 278.618$, $\hat{\alpha}_1 = 0.4716$, $\hat{\alpha}_2 = 1.3533$;
- 2) Капитальная КД (15): $\hat{A} = 3.0024$, $\hat{\alpha}_1 = 0.6253$, $\hat{\alpha}_2 = 0.1504$;
- 3) ПЭЗ (5): $\hat{A} = 2.3515$, $\hat{\nu} = 0.9113$, $\hat{\mu} = 1.206$, $\hat{\rho} = 0.4296$;
- 4) Солоу (6): $\hat{A} = 0.1146$, $\hat{\nu} = 0.989$, $\hat{\alpha}_1 = -2.5189$, $\hat{\alpha}_2 = 0.1181$, $\hat{\gamma} = -1.0074$;
- 5) Джири (23): $\hat{A} = 8.4898$, $\hat{\alpha} = 0.2609$, $\hat{\alpha}_2 = 0.0385$, $\hat{K}^* = 6.3711$, $\hat{L}^* = 0.00063$.

Показатели качества оценивания ПФ для реальных данных и параметры, определяющие динамику реально используемых основных фондов, приведены в таблице 6. Эти показатели существенно лучше у функций Солоу и Джири, причем из них трудно выбрать лучшую.

Таблица 6: Критерии качества оценивания ПФ и параметры динамики реально используемых основных фондов

Функция	Критерии качества				Параметры динамики		
	$\psi(\hat{z})$	R^2	DW	δY	\hat{K}_0	$\hat{\delta}$	$\hat{\xi}$
КД (16)	0.171	0.992	1.45	0.029	—	—	—
КД (15)	0.069	0.997	1.688	0.017	7.058	0.058	1
ПЭЗ (5)	0.0645	0.997	1.775	0.018	6.815	0.078	0.999
Солоу (6)	0.0092	0.999	2.458	0.005	6.453	0.15	1
Джири (23)	0.0146	0.999	2.286	0.007	7.079	0.151	0.9556

Статистические критерии качества регрессионных моделей улучшаются при переходе от инвестиционной ПФ к капитальным. Для однородных моделей производства среднегодовая норма амортизации равна 5.8% (КД)

²Функция Джири известна как функция полезности, порождающая достаточно простой, но эффективный для применения класс функций спроса Клейна – Рубина (1947).

и 7.8% (ПЭЗ), а в неоднородных моделях Солоу и Джири она практически одинакова и равна 15%. Скорость освоения инвестиций представляется параметром ξ . Полученные значения ξ для всех классов ПФ близки или равны 1. Это означает, что инвестиции осваиваются в течение того же периода и соответствует тому, что в новой экономике России практически не ведется промышленное капитальное строительство.

Динамика номинальных K_t и реально используемых \hat{K}_t основных фондов для рассмотренных классов ПФ представлена в таблице 7.

Таблица 7: Наличные и реально используемые фонды (трлн. руб.) в ценах 2000 года

Год t	Наличные фонды K_t	Реально используемые фонды \hat{K}_t			
		КД	ПЭЗ	Солоу	Джири
2000	18.423	7.846	7.476	6.684	7.196
2001	18.608	8.687	8.186	6.980	7.399
2002	18.822	9.479	8.840	7.232	7.577
2003	19.094	10.425	9.642	7.646	7.918
2004	19.429	11.516	10.580	8.198	8.408
2005	19.846	12.743	11.645	8.867	9.024
2006	20.392	14.198	12.925	9.735	9.841
2007	21.075	16.068	14.604	10.974	11.026
2008	—	18.028	16.351	12.226	12.245

При переходе от функции Кобба–Дугласа к более широким классам функций значения реально используемых основных фондов уменьшаются, но динамика стабилизируется, несмотря на более высокую амортизацию. Оценки реально используемых основных фондов по функциям Солоу и Джири близки. Они показывают, что из наличных основных фондов России в последние годы реально работает лишь около половины.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Введен класс многофакторных положительно однородных ПФ с переменной эластичностью замещения. Это первое аналитическое описание таких функций для любого числа факторов. Здесь эластичность замещения является не задаваемой (как в двухфакторных функциях Сато – Гофмана), а вычисляемой характеристикой. Новый класс ПФ повышает адекватность математического моделирования производства. Однако для выбора более адекватной функции необходимо внесение дополнительной информации о поведении эластичности замещения для изучаемого объекта. Такая информация требует более полной статистической базы, на основе которой можно построить хотя бы грубые оценки зависимости ПНЗ от пропорций используемых факторов.

2. Разработана методика поэтапного построения ПФ, заключающаяся в последовательном усложнении используемых ПФ, начиная с функции Кобба – Дугласа, и в передаче полученных значений параметров в качестве начальных для более сложной функции. Эта методика позволяет решать задачи оценивания параметров более сложных классов ПФ, наиболее полно представляющих сложные экономические процессы, в частности, замещения одних факторов другими.

3. Предложена модель оценки параметров капитальных ПФ методом наименьших квадратов по данным об инвестициях. Динамика реально используемых производственных фондов на промежутке наблюдения определяется начальным капиталом, инвестициями, коэффициентом амортизации и лагом освоения инвестиций. Начальный капитал, коэффициент амортизации и лаг оцениваются вместе с параметрами ПФ. Для решения поставленной задачи предложен специальный вариант метода продолжения по параметру, позволяющий решать сложные задачи оптимизации.

4. Выполнена оценка реально используемых основных фондов, коэффициента амортизации и лага освоения инвестиций в основной капитал для экономики России на временном промежутке 2000 – 2008 гг. Результаты показали, что в новой экономике России практически не ведется промышленное капитальное строительство и из наличных основных фондов в последние годы реально работает лишь около половины.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Львов А. Г. Построение производственных функций с переменной эластичностью замещения // Журнал Экономической Теории, 2010. №1. – С. 166–169 (0,35 п. л.).

2. Горбунов В. К., Крылов В. П., Львов А. Г. Опыт построения производственных функций по данным об инвестициях // Обозрение прикладной и промышленной математики. – М.: «ОПиПМ», 2011. Т. 18. В. 1. – С. 112–113 (0,16 п. л.).

3. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы, 2012. Т. 48. №2. – С. 95 – 107 (1,4 п. л.).

Прочие публикации:

4. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение двухфакторных производственных функций с постоянной и переменной эластичностью замещения // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. Вып. 5: Сб. материалов 3-й Междунар. науч. конф. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – С. 114–120 (0,4 п. л.).

5. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение трёхфакторной производственной функции с переменной эластичностью замещения // Труды Средневол. матем. общества. – Саранск: СВМО, 2009. Т. 11. Вып. 1. – С. 91–100 (0,88 п. л.).

6. Львов А. Г. Многофакторные производственные функции с переменной эластичностью // Труды IV Всеросс. симп. по экономической теории. – Екатеринбург: ИЭ УрО РАН, 2010. Т. 2. – С. 41–43 (0,17 п. л.).

7. Горбунов В. К., Львов А. Г. Сравнительный анализ региональных экономик методом производственных функций // Направления и проблемы развития современной теории и методологии региональной экономики. Инструментарий и методы прогнозирования регионального развития. Материалы I Всероссийского симпозиума по региональной экономике. – Екатеринбург: ИЭ УрО РАН, 2011. Т. 1. – С. 147–149 (0,12 п. л.).

8. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Методы оптимизации и их приложения. Труды XV Байкальской международной школы-семинара. – Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. Т. 6. – С. 118–124 (0,61 п. л.).

ЛЬВОВ Александр Геннадьевич

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ
ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность: 08.00.13 – «Математические
и инструментальные методы экономики»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата экономических наук

Подписано в печать 11.04.2012. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ №681.

Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12.