На правах рукописи

Асылгареев Артур Салаватович

Сравнение траекторий моделей, управляемых стохастическими дифференциальными уравнениями

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Уфа — 2019

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Уфимском государственном авиационном техническом университете».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Насыров Фарит Сагитович** ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»
Официальные оппоненты:	**Кузнецов Дмитрий Феликсович,** доктор физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», профессор кафедры «Высшая математика»
	Султанов Оскар Анварович, кандидат физико-математических наук, Институт математики с вычислительным центром — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Защита состоится «23» мая 2019 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»и на сайте *www.ugatu.su*.

Автореферат разослан «___» ________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.288.06,
доктор физико-математических наук,
профессор Булгакова Г. Т.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящее время одной из актуальных задач математического моделирования является качественный анализ моделей, подчинённых стохастическим дифференциальным уравнениям. Предметом исследования данной работы являются модели, управляемые стохастическими дифференциальными уравнениями, в частности, модели динамики численности популяций и ряд моделей финансовой математики, описывающих изменения процентной ставки и стоимости колл-опционов. Для качественного анализа изучаемых моделей в работе решается теоретическая задача сравнения решений стохастических дифференциальных уравнений (далее — СДУ) с различающимися коэффициентами диффузии, а полученные результаты применяются для исследования потраекторной устойчивости возмущённых решений СДУ.

Одним из приложений теорем сравнения является качественный анализ свойств математических моделей. T. G. Gard[1] применял теоремы сравнения при выводе условий «персистентности» («невымирания») видов в стохастических моделях пищевых цепей, R. Rudnicki[2] — при анализе влияния случайных возмущений на модели типа «хищник-жертва», J. Cvitanić[3] — при исследовании хеджирования опционов для крупных инвесторов. W. J. Anderson — для исследования локальных свойств СДУ.

Несмотря на значительное количество работ, посвящённых теоремам сравнения и выводу различных условий устойчивости для СДУ, многие вопросы качественного анализа решений СДУ остаются открытыми (в частности, задачи сравнения решений СДУ общего вида и потраекторной устойчивости). Поэтому построение новых методов качественного анализа моделей, управляемых СДУ, является актуальной проблемой, необходимой для решения ряда прикладных задач.

Степень разработанности темы. Одним из способов качественного анализа свойств дифференциальных систем является классический метод сравнения, в рамках которого выводы об исследуемой системе делаются посредством сравнения её решения с решением другой системы, свойства которой известны. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений такие подходы, в частности, могут быть сформулированы в виде теорем сравнения, также известных как неравенства Чаплыгина, которые были доказаны С. А. Чаплыгиным в процессе построения метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие эти подходы получили в работах W. Wolfgang, A. McNabb, V. Lakshmikantham, J. H. Smith, M. Kirkilionis и др.

---

[1] *Gard, T. G.* Persistence in stochastic food web models / T. G. Gard // Bulletin of Mathematical Biology. 1984. Vol. 46, no. 3. P. 357—370.

[2] *Rudnicki, R.* Influence of stochastic perturbation on prey–predator systems / R. Rudnicki, K. Pichór // Mathematical Biosciences. 2007. Vol. 206, no. 1. P. 108—119.

[3] *Cvitanić, J.* Hedging Options for a Large Investor and Forward-Backward SDE's / J. Cvitanić, J. Ma // The Annals of Applied Probability. 1996. Vol. 6, no. 2. P. 370—398.

Аналоги таких теорем существуют и для СДУ. Впервые теорема сравнения для СДУ Ито с совпадающими коэффициентами диффузии была доказана А. В. Скороходом[4]. Данный результат наиболее подробно изложен в известной монографии С. Ватанабэ, Н. Икэда. T. Yamada доказал строгие теоремы сравнения для одномерных СДУ. В дальнейшем Гейб и Мантеи распространили подход Скорохода на системы СДУ Ито относительно многомерного винеровского процесса. S. Peng и X. Zhu получили условия сравнения для СДУ с дополнительным возмущением в виде пуассоновского процесса. Теоремы сравнения для обратных СДУ рассматривались в работах S. N. Cohen, Z. Yang, Z. Chen, J. Li, M.-C. Quenez. Случай СДУ с различающимися коэффициентами диффузии впервые исследовался О'Брайаном[5] — им была доказана теорема сравнения для автономных СДУ с интегралом Стратоновича без сноса. Подход О'Брайана был распространён на автономные СДУ с ненулевым коэффициентом сноса в работе Y. Ouknine.

Другим важным вопросом, возникающим при исследовании дифференциальных уравнений, является устойчивость. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений решение возмущённой системы, с начальным условием из малой окрестности тривиального решения, называется устойчивым по Ляпунову, если оно никогда не выйдет из некоторой окрестности тривиального решения. В теории стохастических дифференциальных уравнений, в зависимости от характера задач, стоящих перед исследователем, существуют различные определения устойчивости возмущённого решения: по вероятности, в целом, p-устойчивость и др. Данные виды устойчивости СДУ подробно изложены в монографиях Р. З. Хасьминского, Г. Дж. Кушнера. Хасьминский[6] в своей работе предложил стохастический метод функций Ляпунова, который позволил получить условия введённых выше видов устойчивости СДУ.

Выделим тот факт, что рассмотренные ранее определения устойчивости СДУ не гарантируют устойчивости по Ляпунову для почти каждой отдельно взятой траектории решения возмущённой системы. В данной работе при помощи теорем сравнения исследуется потраекторная устойчивость, предполагающая устойчивость по Ляпунову для почти всех траекторий решений возмущённой системы, что делает потраекторную устойчивость более сильным видом устойчивости, чем устойчивость по вероятности, p–устойчивость. Потраекторная устойчивость ранее рассматривалась в работах О. А. Султанова[7] для определённого класса СДУ относительного многомерного винеровского процесса.

---

[4] *Скороход, А. В.* Исследования по теории случайных процессов / А. В. Скороход. Киев : Издательство Киевского Университета, 1961. 216 с.

[5] *O'brien, G. L.* A new comparison theorem for solutions of stochastic differential equations / G. L. O'brien // Stochastics. 1980. Vol. 4, no. 1. P. 245—249.

[6] *Хасьминский, Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. Москва : Наука, 1969. 370 с.

[7] *Султанов, О. А.* Стохастические возмущения устойчивых динамических систем: потраекторный подход / О. А. Султанов // Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 139. С. 91—103.

Целью данной работы являются разработка численно-аналитического метода качественного анализа моделей, подчинённых СДУ. Поставленная цель достигается решением следующих задач:

1. Разработать новый численно-аналитический метод, позволяющий сравнивать решения моделей, управляемых СДУ (п.2 паспорта специальности 05.13.18).
2. Получить достаточные условия потраекторной устойчивости СДУ (п.2 паспорта специальности 05.13.18).
3. Применить разработанный математический аппарат к исследованию некоторых стохастических моделей популяционной динамики и финансовой математики (п.2 паспорта специальности 05.13.18).
4. Разработать комплекс программ для решения задач сравнения численности взаимодействующих популяций в рамках моделей «рождения-гибели», значений мгновенной процентной ставки, подчиненных диффузионным моделям, сравнения рациональной стоимости азиатских колл-опционов, удовлетворяющих модели Хестона, с визуализацией результатов вычислений (п.4 и п.8 паспорта специальности 05.13.18).

Научная новизна:

1. Впервые найдены условия, позволяющие сравнивать траектории решений стохастических дифференциальных уравнений и систем стохастических дифференциальных уравнений общего вида с различающимися коэффициентами диффузии.
2. Найдены достаточные условия потраекторной устойчивости возмущённых решений СДУ, которые ранее не были известны.
3. Разработанный метод сравнения решений СДУ адаптирован к качественному анализу популяционных моделей, моделей динамики процентной ставки и ценообразования азиатских колл-опционов.

Теоретическая и практическая значимость. В данной работе существенно расширен класс стохастических моделей для которых стало возможным применение потраекторных методов сравнения и исследования устойчивости по Ляпунову их реализаций. В диссертации приведены примеры приложения разработанного подхода к задачам оценки численности популяций взаимодействующих видов, значений процентных ставок, подчинённых диффузионным моделям, оценки ценообразования азиатских колл-опционов. Полученные результаты были внедрены в производственную деятельность ООО «Центр технологий моделирования».

Методология и методы исследования. Аналитические исследования проводились с помощью методов теории случайных процессов, вычислительной математики, финансовой математики, теории функции действительной переменной и функционального анализа. Расчёты проводились в среде $Python$ с использованием экосистемы $SciPy$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод сравнения для стохастических дифференциальных уравнений, коэффициенты диффузии которых могут быть различающимися. Полученные результаты распространены на случай СДУ и систем СДУ относительно многомерного винеровского процесса. Результаты опубликованы в [1—3].
2. Приложение разработанного математического аппарата к исследованию популяционных моделей, а также ряда моделей динамики процентной ставки и ценообразования колл-опционов. Результаты опубликованы в [5].
3. Достаточные условия потраекторной устойчивости для возмущенных решений стохастических дифференциальных уравнений. Результаты опубликованы в [1; 3].
4. Алгоритм и комплекс программ на языке программирования $Python$ для решения поставленных в работе задач. Результаты опубликованы в [4].

Эти положения соответствуют областям исследования 2, 4, 8, из паспорта специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректным теоретическим обоснованием приведённых утверждений. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались и докладывались на научных семинарах и конференциях, соответствующих профилю диссертации, в частности были сделаны доклады:

1. На Международном молодежном научном форуме «ЛОМОНОСОВ-2015» (г. Москва, 2015 г.).
2. На Международной конференции «КРОМШ-2016» (г. Севастополь, 2016 г.).
3. На Международном молодежном научном форуме «ЛОМОНОСОВ-2017» (г. Москва, 2017 г.).
4. На Международной конференции «КРОМШ-2017» (г. Севастополь, 2017 г.).
5. На Международной конференции «МКСМ-2»(г. Новороссийск, 2017 г.).
6. На Международной молодёжной (49-й Всероссийской) школе-конференции «СоПроМат» (г. Екатеринбург, 2018 г.).
7. На Международной научно-практической конференции для студентов и молодежи «Наука 2020» (г. Уфа, 2018 г.).
8. На Международной конференции «ОТНА-2018» (г. Ростов-на-Дону, 2018 г.).
9. На Международной конференции «МКСМ-3» (г. Геленджик, 2018 г.).
10. На Международной конференции «КРОМШ-2018» (г. Севастополь, 2018 г.).
11. На общегородском семинаре им. А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики (ИМВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, 25.12.2018 г.).
12. На семинаре по теории вероятностей и случайным процессам кафедры математики УГАТУ, руководитель — Насыров Ф. С. (г. Уфа, 2013-2019 гг.).

Личный вклад. Автор выполнил основной объём теоретических и экспериментальных исследований, представленных в диссертационной работе, включая разработку теоретических методов, проведение исследований, анализ и оформление результатов в форме публикаций и научных докладов. Цели и задачи исследования ставились автором совместно с научным руководителем. Из совместной с Ф. С. Насыровым статьи [1] в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 11 печатных изданиях [1—3; 5—12], 3 из которых изданы в журналах, включённых в Перечень ВАК [1—3], 8 — в сборниках тезисов докладов [5—12]. Получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [4].

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 107 страниц, включая 22 рисунка и 6 таблиц. Список литературы содержит 90 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы. В последующих главах сначала описывается общий принцип, позволяющий сравнивать решения стохастических дифференциальных уравнений и проводить их качественный анализ, далее проводится апробация на частных примерах: популяционных моделях, моделях динамики процентной ставки и одной модели ценообразования азиатских опционов.

Первая глава посвящена построению математических моделей стохастической популяционной динамики и ряда моделей финансовой математики.

Первая группа моделей описывает процессы «рождения-гибели», подчиняющиеся следующей системе СДУ:

$$\begin{cases} du(s) = u(s)[a_1 - b_1 u(s) - c_1 v(s)]\,ds + \sigma u(s)\,dW_s, \\ dv(s) = v(s)[a_2 - b_2 u(s) - c_2 v(s)]\,ds + \sigma v(s)\,dW_s, \end{cases}$$

которая представляет собой:

– модель «хищник-жертва», когда $c_1 > 0$, $b_2 < 0$. В этом случае $u(s)$ отвечает за плотность популяции хищников, а $v(s)$ — жертв. В частности, при $c_1 > 0$, $b_2 < 0$, $b_1 = c_2 = 0$ данная модель называется моделью Лотки-Вольтерра;
– модель состязания за ресурсы, когда $c_1 > 0$, $b_2 > 0$. Эта модель описывает ситуацию, когда взаимодействующие виды конкурируют за ресурсы;
– модель «кооперации», когда $c_1 < 0$, $b_2 < 0$, в этой модели взаимодействие идёт на пользу обеим популяциям.

Второй класс моделей описывает динамику изменения процентной ставки $r(s)$ во времени: $dr(s) = \alpha(s,r(s))\,ds + \sigma(s,r(s))\,dW_s$, $r(s)|_{s=0} = r(0)$. Рассматривая различные виды коэффициентов сноса $\alpha(s,r(s))$ и волатильности $\sigma(s,r(s))$, получим различные модели мгновенной процентной ставки (таблица 1).

Таблица 1 — Диффузионные модели мгновенной процентной ставки

Уравнение	Модель
$dr(s) = \alpha\, ds + \gamma dW_s$	Мертона
$dr(s) = (\alpha - \beta r(s))\, ds + \gamma dW_s$	Васичека
$dr(s) = \alpha r(s)\, ds + \gamma r(s) dW_s$	Дотхана
$dr(s) = (\alpha - \beta r(s))\, ds + \gamma\sqrt{r(s)} dW_s$	Кокса, Ингерсолла, Росса
$dr(s) = \alpha(s)\, ds + \gamma(s) dW_s$	Хо и Ли

Третья модель описывает ценообразование азиатского колл-опциона со временем реализации T и ценой исполнения K, чья стоимость $Y_1(s)$, подчинена двухфакторной модели Хестона[8]

$$\begin{cases} dY_1(s) = Y_1(s)\left[\mu - \frac{Y_2(s)}{2} - \frac{\rho\beta}{4}\right] ds + Y_1(s)\sqrt{Y_2(s)} * dW_s^{(1)}, \\ dY_2(s) = \left(\alpha\left[\Theta - Y_2(s)\right] - \dfrac{\beta^2}{4}\right) ds + \rho\beta\sqrt{Y_2(s)} * dW_s^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta\sqrt{(1-\rho^2)Y_2(s)} * dW_s^{(2)}, \end{cases}$$

где $Y_1(s)$ — цена базового актива, чья волатильность $Y_2(s)$, управляется СДУ, т. е. является случайным процессом, $Y_i(0) > 0$, $i = 1,2$ — начальные условия, $|\rho| \leqslant 1$, $(W_s^{(1)}, W_s^{(2)})$ есть двумерный стандартный винеровский процесс, α, Θ, μ — положительные коэффициенты, причём $2\alpha\Theta - \beta^2 > 0$. Основное отличие азиатского опциона заключается в том, что при расчёте платёжной функции применяется средняя спот-цена, а не спот-цена на дату исполнения, т.е. его платёжная функция имеет вид $\max(Y_3(T)/T - K, 0)$, где K — заранее фиксированный страйк, а $Y_3(s)$ удовлетворяет соотношению $Y_3(s) = \int_0^s Y_1(\tau)\, d\tau$, $Y_3(0) = 0$.

Вторая глава посвящена разработке математического аппарата, необходимого для исследования конкретных моделей, подчинённых СДУ, как с одномерным, так и многомерным винеровским процессом, а также систем таких уравнений.

В параграфе 2.1 излагаются предварительные сведения, необходимые в работе.

В разделе 2.1.1 рассматриваются основные понятия и определения теории стохастических дифференциальных уравнений, в частности, вводятся определения стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Далее приводится теорема существования и единственности для скалярного СДУ с интегралом Ито относительно стандартного винеровского процесса $W_s = W(s,\omega)$, $s \in R^+$, заданного на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, F, (F_s), P)$.

В разделе 2.1.2 вводится определение симметричного интеграла, а также приводятся определение решения и теорема о структуре решений для уравнений с симметричным интегралом.

---

[8] *Heston, H. L.* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options / H. L. Heston // Review of Financial Studies. 1993. Vol. 6, no. 2. P. 327—343.

В разделе 2.1.3 излагается способ нахождения решения скалярного СДУ с интегралом Стратоновича

$$d\eta(s) = \sigma(s,\eta(s)) * dW_s + f(s,\eta(s))\, ds,\ \eta(s)|_{s=0} = \eta(0). \qquad (1)$$

Вводится обозначение $G(s,v) \equiv \int_{\eta(0)}^{v} d\psi/\sigma(s,\psi)$, в предположении, что последний интеграл существует. Показывается, что, если функция $\sigma^{-1}(s,v)$ является локально суммируемой для всех $s \in R^+$, то справедливо следующее равенство: $G(s,\varphi(s,u + C(s))) = u + C(s)$ для всех $s \in R^+$ п. н., причём решение последнего уравнения определяет детерминированную функцию $\varphi(s,y)$ такую, что $\eta(s) = \varphi(s,W_s + C(s))$ п. н., где $C(s) = C(s,\omega)$ является решением ОДУ со случайной правой частью. В дальнейшем функцию $\varphi(s,y)$ называют *структурой решения* уравнения (1); функцию $C(s)$ — *малой функцией сноса* уравнения (1).

В разделе 2.1.4 приводится принцип построения структуры решения систем стохастических дифференциальных уравнений относительного многомерного винеровского процесса.

В разделе 2.1.5 представлены различные определения устойчивости дифференциальных систем. В частности, для возмущённого решения уравнения (1) при условии, что его коэффициенты связаны соотношением $\sigma(s,0) = f(s,0) = 0$ $s \geqslant 0$, вводится определение потраекторной устойчивости.

Параграф 2.2 посвящён выводу формулы представления решения одного скалярного СДУ через решение другого скалярного СДУ:

$$d\eta_i(s) = f_i\,(s,\eta_i(s),\omega)\ ds + \sigma_i\,(s,\eta_i(s)) * dW_s,\ i = 1,2, \qquad (2)$$

где $\eta_i(s)|_{s=0} = \eta_i(0)$. Полагается, что при всех $s \in R^+$ выполнены условия, гарантирующие существование и единственность решений уравнений (2). Затем доказывается, что, если в условиях теоремы о структуре решений уравнений с симметричным интегралом функции $\sigma_i^{-1}(s,v)$ — локально суммируемые по v, а $\eta_1(s)$, $\eta_2(s)$ являются решениями уравнений (2) соответственно, то справедливо соотношение $\eta_2(s) = Q(s,\eta_1(s))$, где $Q(s,v) = \varphi_2(s, \int_{\eta_1(0)}^{v} d\psi/\sigma_1(s,\psi) + C_2(s) - C_1(s))$.

В параграфе 2.3 уточняется вид структуры решения СДУ относительно многомерного винеровского процесса.

В параграфе 2.4 представлены теоремы сравнения для различных видов СДУ с интегралами Стратоновича.

В разделе 2.4.1 формулируются теоремы сравнения для скалярных СДУ с интегралами Стратоновича. Полагается, что $\varphi_1(s,y)$, $C_1(s)$, $G_1(s,v)$, $\varphi_2(s,u)$, $C_2(s)$, $G_2(s,v)$ — структуры решений, малые функции сноса и функции $G(s,v)$ для уравнений (2) соответственно. Далее показывается, что $\eta_2(s) \geqslant \eta_1(s)$ с вероятностью 1, если существует функция $Q(s,v)$ такая, что для решений уравнений (2) справедливо соотношение $\eta_2(s) = Q(s,\eta_1(s))$, и, при этом, для всех $s \in R^+$ выполнено неравенство $\inf_{v\in R}\Delta(s,v) \equiv \inf_{v\in R}[Q(s,v) - v] \geqslant 0$.

Полученный результат применяется для доказательства аналога классической теоремы сравнения для СДУ с совпадающими коэффициентами диффузии.

Затем доказывается, что для потраекторно доминирования решения $\eta_2(s)$ над решением $\eta_1(s)$ уравнений (2), достаточно справедливости следующих соотношений на их коэффициенты сноса, структуры решения и малые функции сноса: $\varphi_2\left(s, G_1(s,v)\right) \geqslant v$ для всех $v \in R$; $\sigma_2(s,v) > 0$ для всех v из области значений функции φ_2; $C_2(s) \geqslant C_1(s)$ при п. в. ω.

В конце раздела демонстрируется, что полученные О'Брайаном результаты по сравнению решений СДУ с различающимися коэффициентами диффузии являются частным случаем результатов, изложенных в настоящей диссертации.

В разделе 2.4.2 доказываются теоремы сравнения для СДУ с интегралом Стратоновича относительно многомерного винеровского процесса:

$$d\eta_i^{(n)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^{(n)} \left(s, \eta_i^{(n)}(s)\right) * dW_s^{(j)} + f_i^{(n)} \left(s,\eta_i^{(n)}(s)\right) ds, \; i = 1{,}2 \qquad (3)$$

с начальными условиями $\eta_i^{(n)}(s)|_{s=0} = \eta_i^{(n)}(0)$, где непрерывные функции $\sigma_{ij}^{(n)}(s,v)$, $f_i^{(n)}(s,v)$ являются детерминированными при всех $s \geqslant 0$, $v \in R$. Кроме того, считаются выполненными ограничения, обеспечивающие существование и единственность решений уравнений (3).

Для уравнений (3) формулируются достаточные условия на их коэффициенты сноса, структуры решения $\widehat{D}^{(j)}$ и малые функции сноса $D^{(0)}$ при которых решение $\eta_2^{(n)}(s) \geqslant \eta_1^{(n)}(s)$ п.н.: $\sigma_{2j}^{(j)}(s,v) > 0$ для всех $v \in R$; $\widehat{D}_2^{(j)}(s,u) \geqslant \widehat{D}_1^{(j)}(s,u)$ для всех $u \in R$; $D_2^{(0)}(s) \geqslant D_1^{(0)}(s)$ с вероятностью 1.

В разделе 2.4.3 доказываются теоремы сравнения для систем СДУ с интегралом Стратоновича. Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} d\eta_i(s) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \left(s,\overline{\eta}(s), \overline{W}_s^{(n)}\right) * dW_s^{(j)} + f_i \left(s,\overline{\eta}(s),\overline{W}_s^{(n)}\right) ds, \\ i = 1{,}2, \end{cases} \qquad (4)$$

с начальными условиями $\overline{\eta}_i(s)|_{s=0} = (\eta_1(0),\eta_2(0))$, $\overline{\eta}(s) = (\eta_1(s),\eta_2(s))$, $\eta_2(0) \geqslant \eta_1(0)$. Для её компонент доказывается новая теорема сравнения. В ней представлены соотношения на коэффициенты сноса и диффузии системы (4) при которых компонента $\eta_2(s)$ потраекторно доминирует над компонентой $\eta_1(s)$ решения системы (4):

- $\sigma_{2j}(0,v_1,v_2,\overline{u}_n) \geqslant \sigma_{1j}(0,v_1,v_2,\overline{u}_n)$ для всех $v_1,\ v_2 \in R$, $\overline{u}_n \in R^n$;
- функции $\sigma_{ij}(0,v_1,v_2,\overline{u}_n)$ — нечётные по u_j для всех $v_1,\ v_2 \in R$, $\overline{u}_n \in R^n$;
- $f_2(s,v_1,v_2,\overline{u}_n) \geqslant f_1(s,v_1,v_2,\overline{u}_n)$ при всех $v_1,\ v_2 \in R$, $\overline{u}_n \in R^n$, $s \in R^+$.

В конце раздела получен аналогичный результат для покомпонентного сравнения двух различающихся систем СДУ.

В параграфе 2.5 доказываются достаточные условия потраекторной устойчивости.

В начале раздела 2.5.1 демонстрируется, что возмущённое решение СДУ $d\zeta(s) = s\zeta(s) * dW(s) - a(s)\zeta(s)\,ds,\, s \in R^+$, является потраекторно устойчивым при $a(s) = s^{\frac{1}{2}+\alpha}$, где $\alpha = const > 0$. Затем формулируются достаточные условия потраекторной устойчивости возмущенного решения $\eta(s)$ скалярного СДУ с интегралом Стратоновича. Применяемый подход заключается в том, что посредством теорем сравнения проверяется справедливость неравенства $|\eta(s)| \leqslant K \cdot |\zeta(s)|$ для п. в. $s \in R^+$, где $\eta(s)$ есть возмущенное решение исследуемого СДУ, а $\zeta(s)$ — решение потраекторно устойчивого СДУ, $K = const > 0$.

В разделе 2.5.2 условия потраекторной устойчивости, полученные **в разделе 2.5.1**, распространяются на случай СДУ относительно многомерного винеровского процесса.

Третья глава посвящена моделированию поставленных задач. Вычислительный эксперимент проводится согласно следующему алгоритму:

1. При помощи доказанных теорем сравнения выводятся условия, при которых решение одного СДУ почти всегда находится выше решения другого СДУ.
2. Моделируется траектория винеровского процесса W_s на отрезке $[0,S]$.
3. С помощью метода Эйлера, описанного в параграфе 3.2, и представленной в $SciPy$ численной схемы решаются ОДУ со случайной правой частью для малых функция сноса на отрезке $[0,S]$. Оцениваются погрешности применяемых численных методов.
4. Найденные значения малых функций сноса подставляются в структуры решений исследуемых систем, за счёт чего вычисляются их решения на отрезке $[0,S]$.
5. Проверяется, что численное решение одного СДУ находится выше решения другого СДУ на отрезке $[0,S]$.

В параграфе 3.1 приводится алгоритм генерации стандартного винеровского процесса.

В параграфе 3.2 производится построение явной разностной схемы Эйлера для решения ОДУ со случайной правой частью. Выбор численной схемы обусловлен тем, что правая часть рассматриваемого ОДУ является недифференцируемой функцией по переменной s.

В параграфе 3.3 представлено общее описание разработанного программного обеспечения на языке программирования Python (таблица 2) для численного решения, сравнения и визуализации решений моделей, управляемых СДУ (пример результата работы программы представлен на рисунке 1).

Таблица 2 — Общая характеристика программы для ЭВМ

Платформа	Python 3.4+
Поддерживаемые архитектуры	x86, x86_64, ARMv6/v7
Протестированные ОС (Windows)	7, 8, 10, Server 2012
Протестированные ОС (Linux)	CentOS, ArchLinux
Протестированные ОС (MacOS)	Sierra

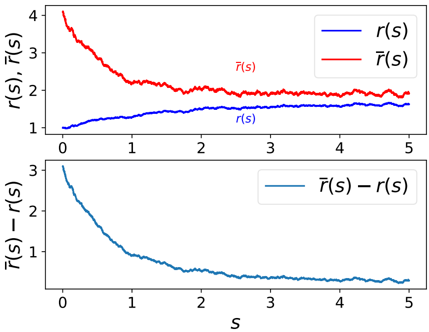

Рис. 1 — Пример результата работы программы для ЭВМ. Сравнение траекторий моделей CIR

Приложение разработано в парадигме объектно-ориентированного программирования согласно принципам SOLID, с применением следующих паттернов проектирования: Итератор, Шаблонный метод, Инъекция зависимостей.

В параграфе 3.4 демонстрируется применение теорем сравнения для анализа численности взаимодействующих видов в популяционных моделях.

В разделе 3.4.1 производится оценка сверху численности популяции жертв в модели «хищник-жертва».

В разделе 3.4.2 проводится покомпонентное сравнение двух моделей «кооперации» взаимодействующих видов:

$$\begin{cases} d\eta_1^{(l)}(s) = \eta_1^{(l)}(s)\left[\alpha_1^{(l)} - \beta_1^{(l)}\eta_1^{(l)}(s) + \gamma_1^{(l)}\eta_2^{(l)}(s) - \frac{\sigma_1^2}{2}\right] ds + \sigma_1\eta_1^{(l)}(s) * dW_s, \\ d\eta_2^{(l)}(s) = \eta_2^{(l)}(s)\left[\alpha_2^{(l)} + \beta_2^{(l)}\eta_1^{(l)}(s) - \gamma_2^{(l)}\eta_2^{(l)}(s) - \frac{\sigma_2^2}{2}\right] ds + \sigma_2\eta_2^{(l)}(s) * dW_s, \end{cases}$$

с начальным условием $\eta_1^{(l)}(s)|_{s=0} = \eta_1^{(l)}(0)$, $\eta_2^{(l)}(s)|_{s=0} = \eta_2^{(l)}(0)$, $l = 1{,}2$. Для исследуемых систем проверяется предположение, что если начальное условие $\overline{\eta}^{(2)}(0)$ покомпонентно доминирует над начальным условием системы $\overline{\eta}^{(1)}(0)$ и при $i = 1{,}2$ коэффициенты систем связаны следующими соотношениями: $\alpha_i^{(2)} \geqslant \alpha_i^{(1)}$, $(-1)^{i+1}(\gamma_i^{(2)} - \gamma_i^{(1)}) \geqslant 0$; $(-1)^i(\beta_i^{(2)} - \beta_i^{(1)}) \geqslant 0$, то решение $\overline{\eta}^{(2)}(s)$ покомпонентно доминирует над решением $\overline{\eta}^{(1)}(s)$ при всех $s \geqslant 0$. Последнее позволяет сравнивать численности популяций различных комбинаций видов, находящихся в симбиотических отношениях.

В параграфе 3.5 с помощью теорем сравнения производится сравнение решений различных недетерминированных моделей, с последующей проверкой полученных результатов в ходе вычислительного эксперимента.

В разделе 3.5.1 теоремы сравнения применяются для потраекторного сравнения значений процентной ставки в моделях Дотхана и Мёртона. Исследуются модели Мёртона $dr(s) = \alpha\, ds + \gamma * dW_s$, $r(s)|_{s=0} = r(0)$, и Дотхана $d\overline{r}(s) = (\overline{\alpha} - \overline{\gamma}^2/2)\overline{r}(s)\, ds + \overline{\gamma r}(s) * dW_s$, $\overline{r}(s)|_{s=0} = r(0)$. Для последних СДУ показывается, что $\overline{r}(s) \geqslant r(s)$ при всех $s \in R^+$ п. н. если выполнены следующие условия: $\overline{r}(0) \geqslant r(0)$, $\overline{\gamma} \geqslant \gamma$, $\gamma[\overline{\alpha} - \frac{\overline{\gamma}^2}{2}] \geqslant \overline{\gamma}\alpha$. Таким образом, справедливости последних неравенств достаточно для того, чтобы значение процентной ставки в модели Дотхана было почти всегда больше, чем в модели Мёртона.

В разделе 3.5.2 приводится применение теорем сравнения для потраекторного сравнения значений процентной ставки, подчинённых двум моделям Кокса-Ингерсолла-Росса с различающимися коэффициентами сноса и волатильности:

$$dr_l(s) = \left[k_l(\Theta_l - r_l(s)) - \frac{\sigma_l^2}{4}\right] ds + \sigma_l \sqrt{r_l(s)} * dW_s,\ r_l(s)|_{s=0} = r_l(0),\ l = 1{,}2. \tag{5}$$

Для уравнений (5) демонстрируется, что выполнения следующих соотношений: $r_2(0)/r_1(0) \geqslant (\sigma_2)^2/(\sigma_1)^2$, $\sigma_2 \geqslant \sigma_1$, $k_2 \geqslant k_1$, $k_1\Theta_1 > (\sigma_1)^2/2$, $k_2\Theta_2 > (\sigma_2)^2/2$, $(\sigma_2)^2 \left[k_1\Theta_1 - (\sigma_1)^2/4\right] \geqslant (\sigma_1)^2 \left[k_2\Theta_2 - (\sigma_2)^2/4\right]$, достаточно для справедливости неравенства $r_2(s) \geqslant r_1(s)$ при всех $s \in R^+$ п. н. Таким образом, основываясь лишь на значениях коэффициентов модели Кокса-Ингерсолла-Росса, мы можем с точностью до почти каждой траектории сравнивать динамики изменений значений процентной ставки.

В разделе 3.5.3 производится сравнение двух моделей ценообразования азиатского опциона, подчинённых модели Хестона:

$$\begin{cases} dY_1^{(l)}(s) = Y_1^{(l)}(s)\left[\mu^{(l)} - \frac{Y_2^{(l)}(s)}{2} - \frac{\rho\beta}{4}\right] ds + Y_1^{(l)}(s)\sqrt{Y_2^{(l)}(s)} * dW_s^{(1)}, \\ dY_2^{(l)}(s) = \left(\alpha\left[\Theta^{(l)} - Y_2^{(l)}(s)\right] - \frac{\beta^2}{4}\right) ds + \rho\beta\sqrt{Y_2^{(l)}(s)} * dW_s^{(1)} \\ \qquad\qquad + \beta\sqrt{(1-\rho^2)Y_2^{(l)}(s)} * dW_s^{(2)}, \\ dY_3^{(l)}(s) = Y_1^{(l)}(s)\, ds,\ l = 1{,}2, \end{cases} \tag{6}$$

с начальными условиями $Y_1^{(l)}(s)|_{s=0} = Y_1^{(l)}(0)$, $Y_2^{(l)}(s)|_{s=0} = Y_2^{(l)}(0)$, $Y_3^{(l)}(s)|_{s=0} = 0$. Для моделей (6) выводятся следующие условия: $\Theta^{(2)} \geqslant \Theta^{(1)} \geqslant \frac{\beta^2}{2\alpha}$, $Y_2^{(2)}(0) \geqslant Y_2^{(1)}(0)$, $\rho\beta(\mu^{(2)} - \mu) \geqslant \alpha(\Theta^{(2)} - \Theta)$, при которых $Y_3^{(2)}(s) \geqslant Y_3^{(1)}(s)$ для всех $s \in R^+$ п. н. Следовательно, основываясь лишь на значениях коэффициентов рассматриваемых моделей ценообразования азиатских опционов, мы можем с точностью до почти каждой траектории сравнить значения их функций выплат.

Заключение. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработан численно-аналитический метод для сравнения решений моделей, подчинённых СДУ, коэффициенты диффузии которых при соответствующих компонентах броуновского движения могут быть различными.
2. При помощи разработанного метода сравнения решений моделей, управляемых СДУ, получены достаточные условия потраекторной устойчивости возмущённых решений СДУ.

3. В ходе вычислительного эксперимента установлено, что разработанный в работе метод сравнения решений СДУ может быть адаптирован для анализа широкого спектра применяемых на практике стохастических моделей, в частности, для качественного исследования популяционных моделей, диффузионных моделей мгновенной процентной ставки, ценообразования азиатских опционов, подчинённых модели Хестона.
4. Разработаный комплекс программ, позволил провести потраекторное сравнение решений моделей, управляемых СДУ, коэффициенты диффузии которых могут быть различными.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, включенных в перечень ВАК

1. *Асылгареев, А. С.* О теоремах сравнения и устойчивости с вероятностью 1 одномерных стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Асылгареев, Ф. С. Насыров // Сибирский математический журнал. — Новосибирск, 2016. — Т. 57, № 5. — С. 969—977. — (Web of Science, Scopus, Перечень ВАК).
2. *Асылгареев, А. С.* Потраекторные теоремы сравнения для стохастических дифференциальных уравнений и их применения / А. С. Асылгареев // Теория вероятн. и ее примен. — Москва, 2017. — Т. 62, № 4. — С. 800. — (Web of Science, Scopus, Перечень ВАК).
3. *Асылгареев, А. С.* О применении теорем сравнения к исследованию устойчивости с вероятностью 1 стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Асылгареев // Уфимский математический журнал. — Уфа, 2018. — Т. 10, № 3. — С. 3—10. — (Scopus, Перечень ВАК).

Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ

4. *Асылгареев, А. С.* ПР-ССМ: сравнение решений стохастических моделей, подчинённых стохастическим дифференциальным уравнениям / А. С. Асылгареев // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018665407 от 04.12.2018 г. — 2018.

В сборниках трудов конференций

5. *Асылгареев, А. С.* О сравнении решений стохастических логистических уравнений Ферхюльста / А. С. Асылгареев // Материалы Международной научно-практической конференции для студентов и молодежи по естественно-научному и техническому направлениям «Наука 2020». — Уфа : Изд-во БГПУ, 2018. — С. 57—59.

6. *Асылгареев, А. С.* О теоремах сравнения и потраекторной устойчивости одномерных стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Асылгареев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015». — Москва : МАКС Пресс, 2015.
7. *Асылгареев, А. С.* О применении теорем сравнения к исследованию потраекторной устойчивости / А. С. Асылгареев // Международная конференция «XXVII Крымской Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016)»: сборник тезисов. — Симферополь : ФОРМА, 2016. — С. 106.
8. *Асылгареев, А. С.* О сравнении решений однородных стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Асылгареев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017». — Москва : МАКС Пресс, 2017.
9. *Асылгареев, А. С.* Об исследовании устойчивости с вероятностью 1 стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Асылгареев // Международная конференция «XXVIII Крымской Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017)»: секции 5-9. — Симферополь : ДИАЙПИ, 2017. — С. 81—82.
10. *Асылгареев, А. С.* Об одном частном случае сравнения решений стохастических дифференциальных уравнений / А. С. Асылгареев // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. — Екатеринбург : Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, 2018. — С. 115.
11. *Асылгареев, А. С.* О теоремах сравнения для стохастических дифференциальных уравнений относительно многомерного винеровского процесса / А. С. Асылгареев // Материалы докладов международной конференции Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VIII. — Ростов-на-Дону : Издательство Ростовского отделения Российской инженерной академии, 2018. — С. 116—117.
12. *Асылгареев, А. С.* О потраекторной устойчивости стохастических дифференциальных уравнений относительно многомерного винеровского процесса / А. С. Асылгареев // Международная конференция «XXVIX Крымской Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2018)»: секции 5-9. — Симферополь : Полипринт, 2018. — С. 155—156.