

**На правах рукописи**



**АКСЕНОВА Зульфия Фильгатовна**

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
МЕХАНИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ  
ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ СТРУКТУРЫ**

**Специальность:**

**05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

**Уфа – 2016**

Работа выполнена на кафедре математического моделирования  
в ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

- Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Ахтямов Азамат Мухтарович**
- Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор  
**Кадченко Сергей Иванович**  
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный  
технический университет им. Г.И. Носова»,  
заведующий кафедрой прикладной математики  
и информатики, профессор, г. Магнитогорск
- кандидат физико-математических наук  
**Абдрахманова Алия Айдаровна**  
ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный  
авиационный технический университет», до-  
цент кафедры математики, г. Уфа
- Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный  
университет имени М.В. Ломоносова»,  
г. Москва

Защита диссертации состоится «26» апреля 2016 г. в 10<sup>00</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 на базе ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» и на сайте [www.ugatu.su](http://www.ugatu.su).

Автореферат разослан «    » марта 2016 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор



Г.Т. Булгакова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Настоящая работа актуальна для диагностики закреплений и нагруженности механических систем, проектирования виброзащитных систем, сохраняющих приборы от ударного воздействия, а также диагностики условий заземления электрических сетей на участках труднодоступных для визуального осмотра, и подбора условий заземления для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока. Близкие исследования проводились в работах, посвященных обратным задачам Штурма-Лиувилля, задачам идентификации краевых условий и задачам идентификации конечномерных операторов.

Обратные задачи Штурма-Лиувилля рассматривались в работах *Марченко В.А., Левитана Б.М., Садовниченко В.А. и др.* Однако, эти задачи были заданы не на графах, а на интервалах. Прямые задачи для дифференциальных уравнений на графах изучались в работе *Покорного Ю.В. и др.* Обратные задачи для графов рассматривались в работах *Юрко В.А. и др.* специалистов по обратным спектральным задачам, однако в этих работах восстанавливались преимущественно коэффициенты дифференциальных уравнений, и для восстановления использовалось несколько спектров.

В настоящей работе восстанавливаются краевые условия для заданных дифференциальных уравнений. Для восстановления используется только один спектр или его часть – собственные частоты самой механической системы (колебания переменного тока электрической сети).

Обратные задачи идентификации краевых условий рассматривались в работах *Ахтямова А.М., Ямиловой Л. С., Муфтахова А. В., Сафиной Г.Ф. и др.*, однако для геометрических графов были решены лишь обратные статические задачи и обратная задача идентификации жесткостей пружин по собственным частотам (наличие присоединенных масс не рассматривалось).

*Валеевым Н.Ф., Мартыновой Ю.В., Рабцевич С.А., Нугумановым Э.Р. и др.* авторами рассматривались задачи идентификации конечномерных операторов, в том числе и краевых условий, заданных на графах. При этом решение оказывается неединственным, в том числе и для несимметрических систем. В данной работе для получения единственности несимметрических систем предложено использовать количество частот, большее, чем количество неизвестных.

**Цель работы:** Целью настоящей работы является исследование математических моделей механической и электрической систем звездообразной структуры, разработка методов диагностики закреплений и нагруженности тупиковых вершин геометрического графа из струн и условий заземления электрических сетей по собственным частотам колебаний.

В соответствии с поставленной целью формулируются и решаются следующие задачи:

1. Исследовать математические модели механической и электрической систем звездообразной структуры.

2. Разработать методы решения обратной задачи для идентификации параметров механической и электрической систем звездообразной структуры. Провести численные эксперименты предложенных методов решения обратной задачи

для идентификации параметров механической и электрической систем звездообразной структуры.

3. Исследовать вопрос о количестве решений в обратных задачах по идентификации коэффициентов жесткости пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа по конечному набору собственных частот, а также ответить на вопрос, какие собственные частоты лучше использовать для такой идентификации.

4. Создать комплекс программ, позволяющий провести расчет собственных частот колебаний струнного графа, а также диагностировать параметры математические модели механической и электрической систем звездообразной структуры.

**Методы исследования.** В работе разработаны новые численные методы для решения задач идентификации коэффициентов жесткостей пружинок и сосредоточенных масс (параметров) на тупиковых концах струнного графа по конечному набору собственных частот колебаний. Использовались также методы решения систем нелинейных уравнений, теории дифференциальных уравнений, теории целых функций, теории обратных задач, вычислительной математики, математического анализа, линейной алгебры.

**Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций,** сформулированных в диссертации, обеспечивается математическими доказательствами теорем, сравнением полученных результатов разработанного численного алгоритма расчета собственных частот для идентификации параметров механической системы из струн с аналитическими решениями для модельных задач, а также результатами других авторов.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

1. Впервые проведено численное моделирование задачи диагностики закрепленных, состоящих из пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа, по конечному набору собственных частот свободных колебаний этого графа. Для идентификации коэффициентов жесткостей пружинок и значений сосредоточенных масс автором используется лишь часть спектра самой спектральной задачи. Такая постановка отличается от работ по коэффициентным обратным задачам Штурма–Лиувилля, в которых коэффициенты краевых условий идентифицировались вместе с коэффициентами дифференциальных уравнений, и для восстановления использовалось несколько спектров, или же спектр и дополнительные спектральные данные (функция Вейля, матрица Вейля, спектральная функция, весовые числа и т.п.) (*n.1 паспорта специальности 05.13.18*).

2. Впервые доказаны теоремы о количестве решений в обратных задачах для идентификации параметров струнного графа по конечному набору собственных частот, а также показана устойчивость этих решений. Показано, что для идентификации параметров лучше использовать первые собственные значения, иначе получаются системы с плохо обусловленными матрицами (*n.2 паспорта специальности 05.13.18*).

3. На основе доказанных теорем разработаны новые численные алгоритмы вычисления коэффициентов жесткостей пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых концах струнного графа. В отличие от известных методов идентифи-

кации ( $n$  параметров по  $n$  собственным частотам) предлагаемые подходы дают ответы на следующие вопросы: 1) какое число решений можно получить по всем собственным частотам; 2) какое минимальное количество собственных частот достаточно для получения этого числа решений. Найдены контрпримеры, показывающие, что трех собственных значений недостаточно для однозначной идентификации трех неотрицательных (физических) параметров  $m_i(h_i)$  ( $i=1,2,3$ ) струнного (геометрического) графа, а шести собственных значений недостаточно для однозначной идентификации шести неотрицательных параметров  $m_i$  и  $h_i$  ( $i=1,2,3$ ). Показано, что в этих случаях достаточно 4-х и 9-и собственных значений соответственно. Проведено сравнение результатов, результатов разработанного численного алгоритма расчета собственных частот для идентификации параметров механической системы из струн с аналитическими решениями для модельных задач, а также результатами других авторов (*п.4 паспорта специальности 05.13.18*).

4. Разработан комплекс программ, позволяющий провести расчет собственных частот колебаний струнного графа и электрической сети, а также позволяющий диагностировать параметры математических моделей механической и электрической систем звездообразной структуры. Проведена проверка адекватности результатов вычислительного эксперимента с помощью численной фильтрации (*п.8 паспорта специальности 05.13.18*).

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Полученные результаты позволяют создавать механические системы с заданным спектром колебаний, проектировать виброзащитные системы, сохраняющие приборы от ударного воздействия, а также проводить диагностику таких систем. Кроме того, они дают возможность диагностировать условия заземления электрических сетей, на участках труднодоступных для визуального осмотра, а также подбирать условия заземления для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока.

**Положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель для диагностирования закреплений состоящих из пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа.
2. Численные методы решения задачи диагностирования закреплений, состоящих из пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа. Анализ численных экспериментов с помощью методов многокомпонентной фильтрации.
3. Алгоритм и комплекс программ в среде Maple для численного расчета собственных частот колебаний струнного графа, а также для диагностирования закреплений, состоящих из пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на всероссийских и международных конференциях:

- VI Международная школа-конференция “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”, Уфа, 9-13 октября 2013 г.;

- Конференция, посвященная 100-летию Левитана “Спектральная теория и дифференциальные уравнения”, Москва, 23–27 июня 2014 г.;
- VII Международная школа-конференция “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”, Уфа, 12-16 октября 2014 г.;
- Всероссийская научная конференция “Обратные краевые задачи и их приложения”, посвященная 100-летию со дня рождения проф. М.Т. Нужина, Казань, 20-24 октября 2014 г.;
- XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015 г.;
- научный семинар лаборатории «Механика твердого тела» Института механики Уфимского научного центра РАН
- научный семинар отдела «Математическая физика» Института математики с вычислительным центром РАН
- научный семинар Башкирского государственного университета по обратным задачам теории колебаний;
- научный семинар Башкирского государственного университета по обратным задачам в науке и технике

Диссертационная работа выполнена при поддержке гранта №2561 «Развитие теории решения прямых и обратных задач математической физики и ее приложения» в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности. Номер госрегистрации: 01201456405 (рук. В.Н. Кризский, 2014–2016 гг).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах, из которых 4 работы размещены в журналах, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Личный вклад автора.** В совместных работах А.М. Ахтямову принадлежит постановка обратных задач. Автору принадлежит анализ поставленных задач, разработка численного метода решения прямых и обратных задач, результаты вычислительных экспериментов, создание комплекса компьютерных программ.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Полный объем диссертации 85 страниц, список литературы содержит 131 наименование.

**Благодарности.** Исследования, представленные в диссертационной работе, проведены под руководством доктора физико-математических наук, профессора Ахтямова Азамата Мухтаровича, которому автор выражает глубокую признательность и благодарность за научные консультации, внимание и помощь, оказанные при выполнении работы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении кратко обоснована актуальность темы, сформулированы цель работы и защищаемые научные положения, отмечена научная новизна и теоретическая ценность полученных результатов, а так же приведены сведения об апробации работы. Даны сведения о структуре и содержании диссертации.

В первой главе данной работы приводится обзор литературы, проведен анализ работ близких к теме диссертации из зарубежных и отечественных источников, степень изученности и научной разработанности темы, а также даются основные принципы и методы математического моделирования сформулированных задач. Подчеркивается актуальность выбранной темы и практическая значимость полученных результатов.

Приводится подробное описание математических моделей механической системы и электрической сети. Дана математическая постановка прямых задач в терминах введенных обозначений.

Ставится задача диагностирования закреплений состоящих из упруго закрепленных сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного (параметров геометрического графа) по собственным частотам его колебаний.

Моделирование колебаний геометрического графа  $G$  в виде звезды из  $n$  ребер-струн с одним общим концом в нуле

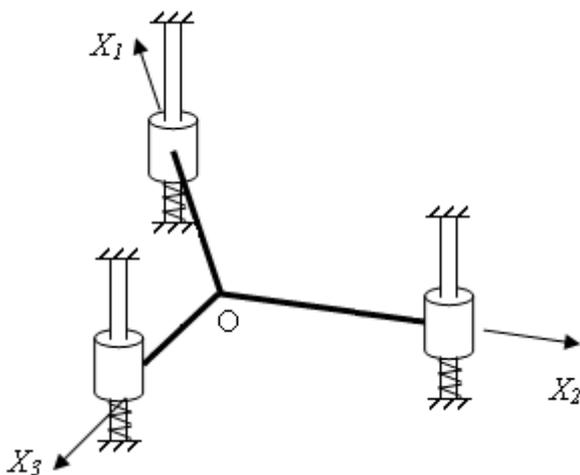


Рис. 1. Первоначальное расположение струнного графа

описывается уравнениями колебаний струны на каждом ребре. Длины струн равны  $l_i$  толщина струн одинаковая, струны не растяжимы. Тупиковые концы струн упруго закреплены, причем каждая из струн может быть закреплена как пружинками неодинаковой жесткости, так и одинаковой, в местах закрепления подвешены сосредоточенные массы  $M_i$  (рис. 1, где  $n=3$ ).

Задача состоит в определении значений сосредоточенных масс (параметров) и (или) значений коэффициентов жесткостей пружин на тупиковых вершинах звездного струнного графа по собственным значениям краевой задачи о колебаниях графа.

Как известно, уравнение свободных колебаний струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) - Q_i(x_i) u_i(x_i, t) \quad (1)$$

$u_i(x_i, t)$  – вертикальное смещение  $i$ -го ребра струнного графа (рис. 2),  $Q_i(x_i)$  – переменный коэффициент упругости среды (вещественная и аналитическая функция),  $a^2$  – положительная постоянная величина,  $x_i$  – расстояние от общего узла по оси  $Ox_i$ ,  $0 \leq x_i \leq l_i$ .

Рассматриваются следующие краевые условия:

$$-M_i \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(l_i, t) = T \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(l_i, t) + H_i \cdot u_i(l_i, t) \quad (2)$$

Они выражают условия упругого закрепления струн с сосредоточенными массами, где  $H_i$  – коэффициент жесткости пружины упругого закрепления  $i$ -ой струны,  $M_i$  – сосредоточенная масса, прикрепленная к  $i$ -ой струне графа (струна  $l_i$  натянута с силой  $T$ ). Значения  $H_i$  и  $M_i$  неотрицательны.

Рассматриваются также условия непрерывности и условия для баланса сил действующих на общую точку  $O$  (узел) со стороны каждой из примыкающих к узлу струн:

$$u_1(0, t) = u_2(0, t) = \dots = u_n(0, t), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} + \left. \frac{\partial u_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} + \dots + \left. \frac{\partial u_n(x_n, t)}{\partial x_n} \right|_{x_n=0} = 0. \quad (4)$$

Решение дифференциального уравнения (1) свободных колебаний струны принимается как

$$u_i(x_i, t) = y_i(x_i) \cdot \cos(\omega t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

С учетом (5) уравнение (1) преобразуется к виду:

$$-\omega^2 \cdot y_i(x_i) = a^2 \cdot y_i''(x_i) - Q_i(x_i) \cdot y_i(x_i) \quad (6)$$

или

$$y_i''(x_i) + \frac{\omega^2}{a^2} y_i(x_i) = \frac{1}{a^2} Q_i(x_i) y_i(x_i). \quad (7)$$

С учетом (5) уравнение (2) преобразуется к виду:

$$M_i \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \cdot y_i(l_i) = T \cdot y_i'(l_i) \cdot \cos(\omega t) + H_i \cdot \cos(\omega t) \cdot y_i(l_i) \quad (8)$$

или

$$y_i'(x_i) + \frac{(H_i - M_i \cdot \omega^2)}{T} y_i(x_i) = 0 \quad (9)$$

Таким образом, колебания каждого  $i$ -го ребра струнного графа моделируются следующим уравнением для собственных функций и собственных значений

$$-y_i''(x_i) + q_i(x_i) \cdot y_i(x_i) = \lambda \cdot y_i(x_i), \quad (10)$$

где  $\lambda = s^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$ ,  $q_i(x_i) = \frac{1}{a^2} Q_i(x_i)$ ,  $y_i(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – амплитуда смещения ребра по времени  $t$   $i$ -ой струны, а  $s$  – спектральный параметр. Функция  $q_i(x_i)$  везде далее предполагается вещественной и аналитической.

Условия непрерывности, условия для баланса сил действующих на общую точку  $O$  (узел) со стороны каждой из примыкающих к узлу струн, а также краевые условия после замены  $u(x_i) = y_i(x_i) \cdot \cos(\omega t)$  записываются в виде:

$$y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_n(0), \quad (11)$$

$$y_1'(0) + y_2'(0) + \dots + y_n'(0) = 0, \quad (12)$$

$$y_i'(l_i) + (h_i - m_i \cdot s^2) \cdot y_i(l_i) = 0 \quad (13)$$

где  $h_i = \frac{H_i}{T}$ ,  $m_i = \frac{a^2 \cdot M_i}{T}$ .

Считаем, что общая точка  $O(x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n)$  не закреплена каким-либо образом (в нашем случае  $n = 3$ ), а является свободной (подвижной). Условию (11) соответствуют условия непрерывности, условию (12) – баланс сил действующих на общую точку  $O$  (узел) со стороны каждой из примыкающих к узлу струн, условия (13) – условия упругого закрепления струн с сосредоточенными массами, где  $h_i$  – относительный коэффициент жесткости пружины упругого закрепления  $i$ -ой струны,  $m_i$  – относительная сосредоточенная масса, прикрепленная к  $i$ -ой струне графа. Далее для краткости слова «относительный» и «относительная» опускаются.

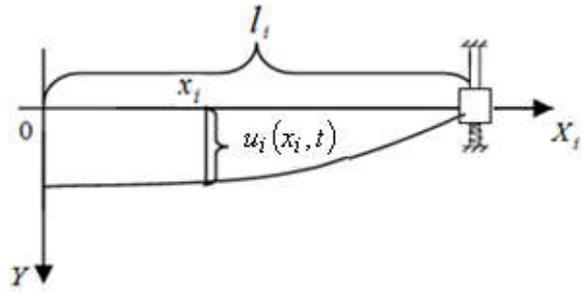


Рис. 2. Вертикальное смещение ребра  $i$ -го струнного графа.

В терминах введенных обозначений поставлены следующие задачи:

а) пусть  $h_i$  и  $m_i$  – неизвестны, а  $l_i$  известны и равны 1. Показать, что по всем собственным значениям коэффициенты жесткостей пружин  $h_i$  и сосредоточенные массы  $m_i$  восстанавливаются однозначно с точностью до перестановок закреплений (пар  $(h_i, m_i)$ ) на тупиковых вершинах местами.

б) пусть  $h_i$  и  $m_i$  – неизвестны, а  $l_i$  известны и равны 1. Найти минимальное число собственных значений, необходимых для идентификации шести параметров  $h_i$  и  $m_i$ .

в) пусть  $h_i(m_i)$  – неизвестны, а  $m_i(h_i)$  – известны,  $l_i$  известны. Найти минимальное число собственных значений, необходимых для идентификации трех параметров  $h_i(m_i)$ .

Перед решением этих обратных задач приводится решение прямой задачи на нахождения собственных значений, способ нахождения которых известен.

Далее на протяжении всей работы используется условие  $q_i(x_i) = q(x_i)$ .

Тогда общим решением уравнения (10), как известно, являются функции

$$y_i(x_i, s) = c_{i1}z_1(x_i, s) + c_{i2}z_2(x_i, s), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

где  $s = \sqrt{\lambda}$ , а  $z_1(x_i, s)$  и  $z_2(x_i, s)$  – линейно независимые решения уравнения (10) удовлетворяющие условиям:

$$z_1(0, s) = 1, \quad z_1'(0, s) = 0, \quad z_2(0, s) = 0, \quad z_2'(0, s) = 1.$$

Для задачи (10) – (13) имеет место утверждение: собственные значения и собственные функции вещественные.

Действительно, пусть  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ , причем  $h_i, m_i$  неотрицательны. Введем в пространстве  $H = L_2(0, l_1) \times L_2(0, l_2) \times L_2(0, l_3)$  (декартовом произведении трех пространств суммируемых с квадратом функций) оператор  $P$ , действующий по правилу:

$$P(\vec{y}) = \begin{pmatrix} -y_1'' + q_1(x_1)y_1, -y_2'' + q_2(x_2)y_2, -y_3'' + q_3(x_3)y_3 \end{pmatrix}^T.$$

Область определения у оператора  $P$  следующая:

$$D(P) = \{(y_1, y_2, y_3)^T / y_i'(l_i) + (h_i - m_i \cdot s^2) \cdot y_i(l_i) = 0, y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), y_1'(0) + y_2'(0) + y_3'(0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)\}.$$

Из построения оператора  $P$  следует, что собственные значения задачи (10) – (13) совпадают с собственными значениями оператора  $P$ . Так же как в работе Наймарка М.А., с помощью интегрирования по частям нетрудно показать, что оператор  $P$  является самосопряженным в пространстве  $H$ . Отсюда следует, что собственные значения оператора  $P$ , а значит и собственные значения задачи (10) – (13) являются вещественными.

Подставив  $z_1(x_i, s)$  и  $z_2(x_i, s)$  в (11)–(13) получено:

$$\sum_{i=1}^n \frac{z_1'(l_i, \lambda) - (h_i - m_i \cdot \lambda) \cdot z_1(l_i, \lambda)}{z_2'(l_i, \lambda) + (h_i - m_i \cdot \lambda) \cdot z_2(l_i, \lambda)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Это и есть уравнение для определения собственных значений  $s = s_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) задачи (10)–(13) или уравнение для решения прямой задачи. При  $q(x_i)$  не равной нулю тождественно в качестве  $z_1(x_i, \lambda)$  и  $z_2(x_i, \lambda)$  используются решения уравнения (10) в виде ряда Тейлора по  $x_i$  и  $\lambda$ . А при приближенном отыскании собственных значений используется главная часть ряда Тейлора.

Решение обратной задачи. Система уравнений (15) при  $s = s_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) является нелинейной относительно неизвестных  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). И если для определения а) б неизвестных параметров  $h_i$  и  $m_i$  использовать также б собственных значений, то помимо диагностируемых данных окажутся и другие лишние решения.

Для выявления количества решений (шестерок неизвестных параметров  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )) по всем собственным частотам был применен аналитический метод целых функций. Метод целых функций основывается на том, что характеристический определитель представляет собой целую функцию порядка  $1/2$ , которая восстанавливается с точностью до ненулевого постоянного множителя по своим нулям (собственным значениям краевой задачи). Поскольку характеристический определитель представляет собой конечную сумму, слагаемыми в которой являются линейно независимые функции, то это позволяет получить теоремы о количестве решений поставленной задачи а) по всему бесконечному набору собственных значений. Показано, что это число в задаче а) равно шести. Условимся задачу (10) – (13) в дальнейшем называть задачей  $L$ .

**Теорема 1.1.** Если  $l_i = l$ ,  $q_i(x_i) = q(x_i)$ , то по всем собственным значениям коэффициенты жесткостей пружинок  $h_i$  и сосредоточенные массы  $m_i$  восстанавливаются с точностью до перестановок закреплений (пар  $(h_i, m_i)$ ) на тупиковых вершинах местами.

При доказательстве используются асимптотические формулы:

$$z_1(x_i, \lambda) = \cos sx_i + \frac{1}{s} v(x_i) \sin sx_i + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad z_2(x_i, \lambda) = \frac{1}{s} \sin sx_i - \frac{1}{s^2} v(x_i) \cos sx_i + O\left(\frac{1}{s^3}\right),$$

$$z_1'(x_i, \lambda) = -s \sin sx_i + v(x_i) \cos sx_i + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad z_2'(x_i, \lambda) = \cos sx_i + \frac{1}{s} v(x_i) \sin sx_i + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad \text{где } v(x_i) = \frac{1}{2} \int_0^{x_i} q_i(t) dt \text{ для}$$

достаточно большого  $\lambda = s^2 \in R$ .

Подстановка их в (15) приводит к уравнению (числитель суммы (15) равен нулю):

$$\Delta(s) = -s(f_1(s) \cdot x_1 + f_2(s) \cdot x_2 + f_3(s) \cdot x_3 + f_4(s) \cdot x_4 + f_5(s) \cdot x_5 + f_6(s) \cdot x_6 + f_7(s) \cdot x_7 + f_8(s) \cdot x_8 + f_9(s) \cdot x_9 - f_0(s)) = 0,$$

Где  $x_1 = h_1 + h_2 + h_3$ ;  $x_2 = m_1 + m_2 + m_3$ ;  $x_3 = h_2 h_3 + h_3 h_1 + h_2 h_1$ ;

$$x_4 = (h_1(m_2 + m_3) + h_2(m_1 + m_3) + h_3(m_1 + m_2)); \quad x_5 = m_3 m_1 + m_2 m_1 + m_3 m_2; \quad x_6 = h_1 h_2 h_3;$$

$$x_7 = m_1 m_2 m_3; \quad x_8 = h_2 h_1 m_3 + h_3 h_1 m_2 + h_3 h_2 m_1; \quad x_9 = m_3 m_2 h_1 + m_3 m_1 h_2 + m_2 m_1 h_3; \quad s = \sqrt{\lambda};$$

$$f_0(s) = 3 \cdot s^6 \cdot \sin(s) \cdot \cos^2(s) + O(s^5); \quad f_1(s) = s^5 (\cos^3(s) - 2 \cdot \sin^2(s) \cdot \cos(s)) + O(s^4);$$

$$f_2(s) = s^7 \cdot (2 \cdot \sin^2(s) \cdot \cos(s) - \cos^3(s)) - O(s^6); \quad f_3(s) = s^4 (2 \cdot \sin(s) \cdot \cos^2(s) - \sin^3(s)) + O(s^2);$$

$$f_4(s) = s^6 \cdot (\sin^3(s) - 2 \cdot \sin(s) \cdot \cos^2(s)) + O(s^5); \quad f_5(s) = s^8 (2 \cdot \sin(s) \cdot \cos^2(s) - \sin^3(s)) + O(s^7);$$

$$f_6(s) = s^3 \cdot 3 \cdot \sin^2(s) \cdot \cos(s) + O(s^2); \quad f_7(s) = -s^9 \cdot 3 \cdot \sin^2(s) \cdot \cos(s) + O(s^8);$$

$$f_8(s) = -s^5 \cdot 3 \cdot \sin^2(s) \cdot \cos(s) + O(s^4); \quad f_9(s) = 3 \cdot s^7 \cdot \sin^2(s) \cdot \cos(s) + O(s^6).$$

Доказательство теоремы 1.1 вытекает из линейной независимости функций

$f_0(s), f_1(s), f_2(s), f_3(s), f_4(s), f_5(s), f_6(s), f_7(s), f_8(s), f_9(s)$  и того, что  $\Delta(\lambda)$  является целой функцией порядка  $\frac{1}{2}$ .

По аналогии с механической системой рассматривается задача для электрической сети.

В главе 2 методами численного моделирования, определяется минимальное число собственных значений достаточно для идентификации трех (шести) параметров механической системы из струн. Представлены контрпримеры, показывающие, что если взять такое же число собственных значений, что и число неизвестных параметров, то этого будет недостаточно для однозначности восстановления неизвестных с точностью до перестановок пар  $(h_i, m_i)$  местами. Решений будет больше. Показано, что для получения нужного (меньшего) числа решений при восстановлении трех параметров требуется использовать четыре собственных значения, а при восстановлении шести параметров – девять.

**Контрпример 1.** Приведен контрпример, который показывает, что трех собственных значений недостаточно для однозначности идентификации трех неотрицательных параметров геометрического графа (значений масс  $m_i$ ) ( $i=1, 2, 3$ ) с точностью до перестановок пар  $(h_i, m_i)$  местами.

Пусть даны три собственных значения  $s_1=0.9419375$ ,  $s_2=1.6738488$ ,  $s_3=1.8763382$ , причем длины струн равны  $l_i=1$  ( $i=1, 2, 3$ ), и коэффициенты жесткости пружин  $h_1=1, h_2=2, h_3=3$  соответственно,  $q(x_i) \equiv 0$ . Требуется найти значения масс  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Эта задача имеет шесть решений:  $\{m_1 = 0.400, m_2 = 0.500, m_3 = 0.600\}$ ;  $\{m_1 = 0.425, m_2 = 0.329, m_3 = 0.763\}$ ;  $\{m_1 = 0.257+0.459 \cdot i, m_2 = 1.125-0.387 \cdot i, m_3 = 0.649-0.704 \cdot i\}$ ;  $\{m_1 = 0.272+0.488 \cdot i, m_2 = 0.497-0.632 \cdot i, m_3 = 1.786-0.441 \cdot i\}$ ;  $\{m_1 = 0.272-0.488 \cdot i, m_2 = 0.497+0.632 \cdot i, m_3 = 1.786+0.441 \cdot i\}$ ;  $\{m_1 = 0.257-0.459 \cdot i, m_2 = 1.125+0.387 \cdot i, m_3 = 0.649+0.704 \cdot i\}$ , из них два решения имеют физический смысл:  $\{0.400, 0.500, 0.600\}$  и  $\{0.425, 0.329, 0.763\}$ . Эти два разных физических решения имеют одинаковые собственные значения  $s_1=0.9419375$ ,  $s_2=1.6738488$ ,  $s_3=1.8763382$ .

Для решения обратной задачи для идентификации трех неотрицательных параметров геометрического графа (значений масс  $m_i$ ) ( $i=1, 2, 3$ ) с точностью до перестановок пар  $(h_i, m_i)$  местами по четырем собственным значениям предложен

новый метод, в частности, который учитывает специфику рассматриваемых нелинейных алгебраических уравнений.

**2.1. Метод выделения линейной подсистемы.** Новый метод выделения линейной подсистемы, в частности, учитывает специфику рассматриваемых нелинейных алгебраических уравнений. В этом параграфе используется условие  $q(x_i) \equiv 0$ .

Собственные значения задачи  $L$  удовлетворяют следующему уравнению (числитель суммы (15) равен нулю):

$$x_1 f_1(s_k) + x_2 f_2(s_k) + x_3 f_3(s_k) + x_4 f_4(s_k) = -f_0(s_k) - x_5 f_5(s_k) - x_6 f_6(s_k) \quad (16)$$

$$\text{Где } f_1(s) = 2 \cdot s^2 \cdot \cos(s) \cdot \sin^2(s) - s^2 \cos^3(s); \quad f_2(s) = 2s^3 \cos^2(s) \sin(s) - s^3 \sin^3(s);$$

$$f_3(s) = 3 \cdot s^4 \cdot \cos(s) \cdot \sin^2(s); \quad f_4(s) = 3 \cdot s^2 \cdot \cos(s) \cdot \sin^2(s); \quad f_5(s) = s \cdot \sin^3(s) - 2 \cdot s \cdot \cos^2(s) \cdot \sin(s);$$

$$f_6(s) = 3 \cdot \cos(s) \cdot \sin^2(s);$$

$$f_0(s) = 3s^6 \cos(s) \sin^2(s) m_1 m_2 m_3 + (s^4 \cos^3(s) - 2s^4 \cos(s) \sin^2(s)) (m_1 + m_2 + m_3) + (s^5 \sin^3(s) - 2s^5 \cos^2(s) \sin(s)) (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3) + 3s^3 \cos^2(s) \sin(s); \quad (17)$$

$$x_1 = h_1 + h_2 + h_3; \quad x_2 = h_1(m_2 + m_3) + h_2(m_1 + m_3) + h_3(m_1 + m_2); \quad x_3 = h_1 m_2 m_3 + h_2 m_1 m_3 + h_3 m_1 m_2;$$

$$x_4 = h_1 h_2 m_3 + h_2 h_3 m_1 + h_1 h_3 m_2; \quad x_5 = h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3; \quad x_6 = h_1 h_2 h_3. \quad (18)$$

Если определитель системы (16) отличен от нуля, то каждая из переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  выражается через  $x_5, x_6$  единственным образом. Первые три уравнения системы (18) являются линейными относительно искомого  $h_1, h_2, h_3$ .

Определитель последней системы уравнений отличен от нуля (это легко показать, пользуясь элементарными преобразованиями и разложив определитель по первой строке).

Поэтому  $h_1, h_2, h_3$  однозначно выражаются через  $x_5, x_6$ . Подставив эти выражения, а также выражение  $x_4$  через  $x_5, x_6$  в последние 3 уравнения системы (18), получена система трех нелинейных уравнений относительно двух неизвестных  $x_5, x_6$ .

С помощью численного моделирования было установлено, что четырех собственных значений достаточно, чтобы найти  $\{h_1, h_2, h_3\}$  единственным образом.

Однако на практике проверку указанных условий достаточно трудоемко реализовать, поэтому предложен другой метод – метод двух нелинейных систем.

**2.2. Метод двух нелинейных систем** – основывается на решении двух систем нелинейных уравнений, у которых количество неизвестных совпадает с количеством уравнений. Сначала решается система (15) при  $k=1, 2, \dots, n-1, n$ , т.е. без  $(n+1)$ -го уравнения. Затем система (15) решается при  $k=1, 2, \dots, n-1, n+1$ , т.е. без  $n$ -го уравнения, при этом каждая система будет иметь  $n!$  решений (в нашем случае  $n=3$ ). Пересечение множеств полученных решений является искомым.

**Пример 2.1.** Пусть известны четыре собственных значения  $s_1=0,9419374$ ,  $s_2=1,6738487$ ,  $s_3=1.8763382$ ,  $s_4=2.6350993$  ( $q(x_i) \equiv 0$ ). Требуется найти значения масс  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), причем длины струн равны  $l_i=l=1$  ( $i=1, 2, 3$ ), и коэффициенты жесткости пружин  $h_1=1, h_2=2, h_3=3$ .

Решив систему (15) при  $k=1, 2, 3$  получено  $3!=6$  наборов решений:  $\{m_1=0,400; m_2=0,500; m_3=0,599\}; \{m_1=0,425; m_2=0,329; m_3=0,763\}; \{m_1=0,257 + 0,459 \cdot i; m_2=1,125 - 0,387 \cdot i; m_3=0,649 - 0,704 \cdot i\}; \{m_1=0,272 + 0,488 \cdot i; m_2=0,497 - 0,632 \cdot i; m_3=1,786 - 0,441 \cdot i\}; \{m_1=0,257 - 0,459 \cdot i; m_2=1,125 + 0,387 \cdot i; m_3=0,649 + 0,704 \cdot i\}; \{m_1=0,272 - 0,488 \cdot i; m_2=0,497 + 0,632 \cdot i; m_3=1,786 + 0,441 \cdot i\}.$

Решив ту же систему (15) при  $k=1, 2, 4$  получено  $3!=6$  следующих наборов решений:  $\{m_1=0,400; m_2=0,500; m_3=0,599\}$ ;  $\{m_1=0,415; m_2=0,347; m_3=0,788\}$ ;  $\{m_1=0,751; m_2=-0,064; m_3=-2,536\}$ ;  $\{m_1=0,836; m_2=-3,313; m_3=0,084\}$ ;  $\{m_1=-0,053 + 0,010 \cdot i; m_2=-0,979 + 0,204 \cdot i; m_3=1,344 - 0,413 \cdot i\}$ ;  $\{m_1=-0,053 - 0,010 \cdot i; m_2=-0,979 - 0,204 \cdot i; m_3=1,344 + 0,413 \cdot i\}$ ;

Искомые данные, лежат в пересечении найденных решений этих двух систем уравнений. Это решение  $\{0,4; 0,5; 0,6\}$ .

**Пример 2.2.** Пусть известны четыре собственных значения  $s_1=1,6872679$ ,  $s_2=3,7745783$ ,  $s_3=4,1135408$ ,  $s_4=6,5849325$  собственные значения задачи  $L(q(x_i) \neq 0)$ . Известны длины струн  $l_i=l=1 (i=1, 2, 3)$ , а также значения коэффициентов жесткости пружин  $h_1=1, h_2=2, h_3=3$ . Требуется найти  $m_1, m_2, m_3$ . Подставив известные данные в (15) при  $q(x_i) = \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2$ , получено  $m_1=0.399, m_2=0.500, m_3=0.599$ .

**Контрпример 2.** Приведен контрпример, показывающий, что шести собственных значений недостаточно для однозначной идентификации шести неотрицательных параметров геометрического графа (значений масс  $m_i (i=1, 2, 3)$  и коэффициентов жесткости пружины  $h_i (i=1, 2, 3)$ ).

Помимо решения  $\{h_1=1.999, h_2=1.000, h_3=3.000, m_1=0.499, m_2=0.400, m_3=0.600\}$  краевой задачи  $L(q(x_i) \equiv 0)$  есть еще близкое решение  $\{h_1=2.014, h_2=1.006, h_3=2.962, m_1=0.484, m_2=0.410, m_3=0.603\}$  имеющее вполне реальный физический смысл. Это решение проверено с помощью решения прямой задачи, при этом порядок значащих цифр увеличен до 20 (ввиду громоздкости собственные значения представлены с точностью до семи значащих цифр (табл. 1))

Таблица 1

Собственные значения исходного решения	Собственные значения второго решения
$s_1 = 0.9419374$	$s_1 = 0.9419374$
$s_2 = 1.6738487$	$s_2 = 1.6738487$
$s_3 = 1.8763382$	$s_3 = 1.8763382$
$s_4 = 2.6350993$	$s_4 = 2.6350993$
$s_5 = 3.7588639$	$s_5 = 3.7588639$
$s_6 = 5.1462313$	$s_6 = 5.1462313$
$s_7 = 6.5813183$	$s_7 = 6.5831714$

Первые 6 собственных частот совпадают с точностью до 19 значащих цифр (ввиду громоздкости результаты приведены с точностью до 7 значащих цифр), а седьмое - только до 3 значащих цифр (т.е. отличается).

Вывод: шести собственных значений недостаточно для восстановления 6 параметров с точностью до перестановок закреплений местами.

### 2.3. Метод исключения лишних решений.

Показано, что для отыскания 6 неизвестных параметров можно использовать не все собственные частоты, а лишь 9 из них. Предложенный метод основан на том, что в методе целых функций использовалось 9 уравнений. Для получения

этих 9 уравнений будем использовать 9 собственных частот. Для простоты изложим метод для случая  $q(x_i) = 0$ .

При решении задачи а) (поиске 6 неизвестных параметров) в методе целых функций сначала решались первые 6 уравнений. Из них находились 36 наборов решений. Затем с помощью 3 других уравнений исключались лишние. В результате оставались 6 решений.

**Пример 2.3.** Пусть  $s_1 = 0.5351947$ ;  $s_2 = 0.7209194$ ;  $s_3 = 1.7077687$ ;  $s_4 = 3.2007784$ ;  $s_5 = 4.7562882$ ;  $s_6 = 6.3122330$ ;  $s_7 = 7.8802149$ ;  $s_8 = 9.4440741$ ;  $s_9 = 11.0142910$  являются собственными значениями краевой задачи  $L$  и длины струн  $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ . Требуется найти  $h_1, h_2, h_3, m_1, m_2, m_3$ . Решив систему линейных уравнений (16), получено  $x_1 = 6.0001245$ ,  $x_2 = 11.0002292$ ,  $x_3 = 6.0001258$ ,  $x_4 = 15.0002729$ ,  $x_5 = 74.0013465$ ,  $x_6 = 120.0021835$ ,  $x_7 = 58.0011800$ ,  $x_8 = 51.0010534$ ,  $x_9 = 138.0027133$ . Подставив эти значения в систему уравнений

$$h_1 + h_2 + h_3 = x_1, m_1 + m_2 + m_3 = x_2, h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3 = x_3, m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_1 m_3 = x_4, h_1 h_2 h_3 = x_5, \\ m_1 m_2 m_3 = x_6, h_1(m_2 + m_3) + h_2(m_1 + m_3) + h_3(m_1 + m_2) = x_7, h_1 h_2 m_3 + h_2 h_3 m_1 + h_1 h_3 m_2 = x_8, \\ m_1 m_2 h_3 + m_2 m_3 h_1 + m_3 m_1 h_2 = x_9, \text{ и решив первые 6 уравнений системы, получено 36}$$

наборов решений, из которых только 6 наборов являются искомыми:

$$\{h_1 = 3.000, h_2 = 1.000, h_3 = 1.999, m_1 = 6.001, m_2 = 4.000, m_3 = 4.997\}; \{h_1 = 1.999, \\ h_2 = 1.000, h_3 = 3.000, m_1 = 4.997, m_2 = 4.000, m_3 = 6.001\}; \{h_1 = 3.000, h_2 = 1.999, \\ h_3 = 1.000, m_1 = 6.001, m_2 = 4.997, m_3 = 4.000\}, \{h_1 = 1.000, h_2 = 1.999, h_3 = 3.000, \\ m_1 = 4.000, m_2 = 4.997, m_3 = 6.001\}, \{h_1 = 1.999, h_2 = 3.000, h_3 = 1.000, m_1 = 4.997, \\ m_2 = 6.001, m_3 = 4.000\}, \{h_1 = 1.000, h_2 = 3.000, h_3 = 1.999, m_1 = 4.000, m_2 = 6.001, \\ m_3 = 4.997\}$$

Модифицированная система (16) позволяет по 9 собственным значениям одновременно восстановить и значения сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа, и значения коэффициентов жесткости пружины с точностью до перестановок закреплений местами.

Приведен более простой способ нахождения параметров, который назван в работе методом введения дополнительных неизвестных (на примере задачи в).

**2.4. Метод введения дополнительных неизвестных.** В этом методе используется большее число собственных значений, чем в предыдущих методах. Однако этот метод более прост в применении.

Постановка задачи: Пусть  $h_i$  – неизвестны, а  $m_i$  – известны и попарно различны, длины струн  $l_i$  попарно одинаковы и равны единице (задача в). Требуется найти  $h_i$  по известному набору собственных значений  $s_k$  задачи  $L$ . Собственные значения задачи  $L$  удовлетворяют следующему уравнению (числитель суммы (15) равен нулю):

Пусть  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  собственные значения задачи  $L$ . Подставляя их в (16), получаем систему шести линейных уравнений от шести неизвестных  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ :

$$x_1 f_1(s_k) + x_2 f_2(s_k) + x_3 f_3(s_k) + x_4 f_4(s_k) + x_5 f_5(s_k) + x_6 f_6(s_k) + f_0(s_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (19)$$

Из правил Крамера следует, что если определитель матрицы

$$D = \begin{vmatrix} f_1(s_1) & f_2(s_1) & f_3(s_1) & f_4(s_1) & f_5(s_1) & f_6(s_1) \\ f_1(s_2) & f_2(s_2) & f_3(s_2) & f_4(s_2) & f_5(s_2) & f_6(s_2) \\ f_1(s_3) & f_2(s_3) & f_3(s_3) & f_4(s_3) & f_5(s_3) & f_6(s_3) \\ f_1(s_4) & f_2(s_4) & f_3(s_4) & f_4(s_4) & f_5(s_4) & f_6(s_4) \\ f_1(s_5) & f_2(s_5) & f_3(s_5) & f_4(s_5) & f_5(s_5) & f_6(s_5) \\ f_1(s_6) & f_2(s_6) & f_3(s_6) & f_4(s_6) & f_5(s_6) & f_6(s_6) \end{vmatrix} \quad (20)$$

системы уравнений (19) отличен от нуля, то неизвестные  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  находятся единственным образом по формулам  $x_j = \frac{D_j}{D}$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ), где  $D_j$  - определитель матрицы, получаемый заменой  $j$ -ого столбца столбцом свободных членов. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Если  $s_1, s_2, \dots, s_6$  являются точными собственными значениями краевой задачи  $L$ ,  $D \neq 0$  и значения сосредоточенных масс попарно различны, т.е. удовлетворяют условию  $(m_1 - m_2)(m_2 - m_3)(m_1 - m_3) \neq 0$ , то система (19) имеет единственное решение  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ , определяемое по формулам Крамера  $x_j = \frac{D_j}{D}$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ), а значения коэффициентов жесткости пружинок  $h_1, h_2, h_3$  находятся однозначно по формулам (18).

Заметим, что этот метод справедлив и для случая когда,  $m_i$  - известны, и попарно различны, а  $h_i$  - неизвестны, длины струн  $l_i$  попарно одинаковы и равны единице.

**Пример 2.4.** Пусть шесть собственных значения задачи  $L$  есть следующие значения:  $s_1=0.9419374$ ,  $s_2=1.6738487$ ,  $s_3=1.8763382$ ,  $s_4=2.6350993$ ,  $s_5=3.7588639$ ,  $s_6=5.1462313$  и известны  $m_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) попарно различны, т.е. удовлетворяют условию:  $(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0$   $m_1=0.4$ ,  $m_2=0.5$ ,  $m_3=0.6$ . Требуется найти  $h_1, h_2, h_3$ . Воспользовавшись системой линейных уравнений (19) по формулам Крамера, получим однозначно  $x_1=5.9999999$ ,  $x_2=5.8000000$ ,  $x_3=5.1000000$ ,  $x_4=1.3800000$ ,  $x_5=11.0000000$ ,  $x_6=6.0000000$ . Используя формулы (18) коэффициенты жесткости пружинок равны  $h_1=1.000$ ,  $h_2=1.999$ ,  $h_3=3.000$ .

Задачу  $L$ , но с другими коэффициентами в краевых условиях обозначена через  $\tilde{L}$ . Всюду в работе считается, что если некоторый символ обозначает объект из задачи  $L$ , то символ с волной наверху - обозначает аналогичный объект задачи  $\tilde{L}$ .

**Теорема 2.2. (устойчивости решения).** Пусть  $s_k$  собственные значения задачи  $L$ . Если для любого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , существуют  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такое что  $|\tilde{s}_k - s_k| < \delta$  ( $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), тогда выполняется неравенство  $|\tilde{h}_i(s_k) - h_i(s_k)| < \varepsilon$  ( $i=1, 2, 3; k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

Эта теорема следует из аналитичности  $D(s_k)$  и  $D_j(s_k)$ .

**Предложение 2.1.** Если константы краевой задачи  $L$  одинаковы  $m_i = m$  ( $i=1, 2, 3$ ), тогда константы  $h_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в граничных условиях задачи  $L$  находятся с точностью до перестановок  $h_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) местами по шести собственным значениям.

**Пример 2.5.** Пусть известен следующий набор собственных значений  $s_1=0.9309993$ ,  $s_2=1.6259086$ ,  $s_3=1.9149805$ ,  $s_4=2.652015912$ ,  $s_5=3.7369491$ ,  $s_6=5.1436131$ . Известны значения сосредоточенных масс  $m_i=0.5$  ( $i=1,2,3$ ), длины струн  $l_i=l=1$  ( $i=1,2,3$ ). Требуется найти значения коэффициенты жесткости  $h_i$  ( $i=1,2,3$ ). Подставив известные значения в (19), получено шесть решений:  $\{h_1 = 1.000, h_2 = 1.999, h_3 = 3.000\}$ ,  $\{h_1 = 1.000, h_2 = 3.000, h_3 = 1.999\}$ ,  $\{h_1 = 1.999, h_2 = 1.000, h_3 = 3.000\}$ ,  $\{h_1 = 1.999, h_2 = 3.000, h_3 = 1.000\}$ ,  $\{h_1 = 3.000, h_2 = 1.000, h_3 = 1.999\}$ ,  $\{h_1 = 3.000, h_2 = 1.999, h_3 = 1.000\}$ . Т.е.  $h_i$  ( $i=1,2,3$ ) найдены с точностью до перестановок местами.

**Предложение 2.2.** Если константы краевой задачи  $L$  одинаковы  $h_i = h$  ( $i=1,2,3$ ) и длины струн  $l_i=l=1$  ( $i=1,2,3$ ), тогда константы  $m_i$  ( $i=1,2,3$ ) в граничных условиях задачи  $L$  находятся с точностью до перестановок  $m_i$  ( $i=1,2,3$ ) местами по шести собственным значениям.

Для идентификации сосредоточенных масс лучше использовать первые собственные значения. Использование в качестве данных восстановления собственных значений с большими номерами еще не гарантирует высокой точности восстановления сосредоточенных масс на концах тупиковых вершин струнного графа, ввиду того, что соответствующая матрица системы уравнений может оказаться плохо обусловленной. Соответствующие примеры 2.6 и 2.7., подтверждающие этот вывод, приведены в диссертации.

В главе 3 показано, что результаты вычислений собственных значений предложенных в данной работе хорошо согласуются с известными методами и с численными результатами других авторов. Также проведено сравнение собственных частот для однородной струны, рассматриваемой как геометрический граф, и непрерывной однородной струны. Проведена оценка погрешностей полученных результатов.

На рис. 3 показаны результаты после шести шагов фильтрации численных результатов решения задачи методом двух нелинейных систем. На оси абсцисс отложены значения  $n$  (длины мантииссы), на оси ординат десятичные логарифмы относительной погрешности  $-\lg \Delta_n$  (т.е. точности, выраженной в количестве точных десятичных знаков). Линия, обозначенная цифрой 0 представляет результаты прямого вычисления, цифрами 1, 2, ... обозначены результаты 1-й, 2-й и т.д. фильтраций.

Результаты фильтрации позволяют оценить погрешность, подтвердить оценки и теоретически уточнить результат вычислений.

По результатам исследований прямой и обратной спектральных задач заданных на графе был разработан программный продукт идентификации сосредото-

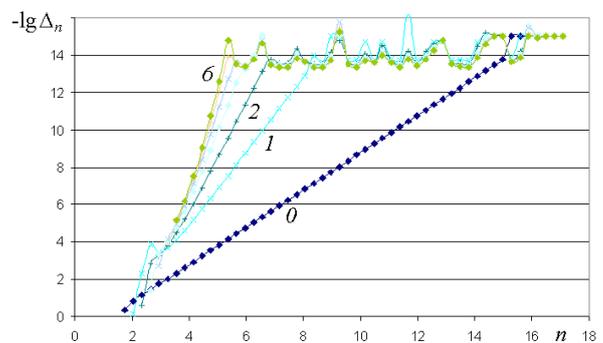


Рис. 3. Результат фильтрации вычисления параметра  $m_1$  при изменении точности  $S_1$

точных масс на графе по конечному набору собственных частот. Продукт составлен с использованием команд математического пакета Maple.

В заключении сформулированы основные результаты работы

1. Впервые проведено численное моделирование задачи диагностики закреплений, состоящих из пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа, по конечному набору собственных частот свободных колебаний этого графа. Для идентификации коэффициентов жесткостей пружинок и значений сосредоточенных масс автором используется лишь часть спектра самой спектральной задачи, что является существенным отличием от работ по коэффициентным обратным задачам Штурма–Лиувилля, где коэффициенты краевых условий идентифицировались вместе с коэффициентами дифференциальных уравнений и для восстановления использовалось несколько спектров, или же спектр и дополнительные спектральные данные (функция Вейля, матрица Вейля, спектральная функция, весовые числа и т.п.).

2. Впервые доказана теорема о количестве решений в обратных задачах для идентификации параметров струнного графа по конечному набору собственных частот, а также показана устойчивость этих решений. Показано, что для идентификации параметров лучше использовать первые собственные значения, иначе получаются системы с плохо обусловленными матрицами.

3. На основе доказанной теоремы разработаны новые численные алгоритмы вычисления коэффициентов жесткостей пружинок и сосредоточенных масс на тупиковых концах струнного графа. В отличие от известных методов идентификации ( $n$  параметров по  $n$  собственным частотам) предлагаемые подходы дают ответы на следующие вопросы: 1) какое число решений можно получить по всем собственным частотам; 2) какое минимальное количество собственных частот достаточно для получения этого числа решений. Найдены контрпримеры, показывающие, что трех собственных значений недостаточно для однозначной идентификации трех неотрицательных (физических) параметров  $m_i(h_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) струнного (геометрического) графа, а шести собственных значений недостаточно для однозначной идентификации шести неотрицательных параметров  $m_i$  и  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Показано, что в этих случаях достаточно использование 4-х и 9-и собственных значений соответственно. Проведено сравнение результатов, результатов разработанного численного алгоритма расчета собственных частот для идентификации параметров механической системы из струн с аналитическими решениями для модельных задач, а также результатами других авторов.

4. Разработан комплекс программ, позволяющий провести расчет собственных частот колебаний струнного графа и электрической сети, а так же позволяющий диагностировать параметры математических моделей механической и электрической систем звездообразной структуры. Проведена проверка адекватности результатов вычислительного эксперимента с помощью численной фильтрации.

#### **Список публикаций по теме диссертации.**

#### **В рецензируемых журналах из перечня ВАК.**

1. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Восстановление сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа // В мире научных открытий. Красноярск: Научно-инновационный центр, 2013. № 2.1(38). С. 56 – 67.

2. Ахтямов А.М., Аксенова З.Ф. Акустическая диагностика сосредоточенных масс на концах струнного графа с упругим закреплением на концах // Вестник Башкирского университета. 2014. Т. 19. № 1. С. 158-163.
3. Ахтямов А.М., Аксенова З.Ф. Идентификация параметров упругого закрепления механической системы из струн // Современные проблемы науки и образования. 2015. №1. URL: <http://www.science-education.ru/121-18706>
4. Ахтямов А.М., Аксенова З.Ф. О диагностике механической системы из струн по конечному набору собственных значений // Фундаментальные исследования. 2015. №5 (часть 1) С. 27-32.

#### **Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:**

5. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Программа поиска сосредоточенных масс на тупиковых вершинах струнного графа // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов <Наука и образование>, № 6 (61) июнь 2014. URL: <http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2014/6.doc>. (дата обращения: 07.04.2014). С. 27 Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 20230 ИНИПИ РАО ОФЭРНиО от 18 июня 2014. Государственная академия наук Российская академия образования Институт научной и педагогической информации, Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование»

#### **В других изданиях**

6. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Определение некоторых параметров на тупиковых вершинах струнного графа // VI Международная школа-конференция “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”. 9-13 октября 2013 г. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – С. 291-292.
7. Аксенова З.Ф. Идентификация параметров заземления провода по собственным частотам колебаний переменного тока // Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённая 100-летию Б.М. Левитана: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2014. С. 42. — 158 с.
8. Аксенова З.Ф. Идентификация некоторых параметров струнного графа // Материалы Всероссийской научной конференции «Обратные краевые задачи и их приложения» посвященной 100-летию профессора М.Т. Нужина (г. Казань, 20-24 октября 2014 г.) [Электронный ресурс]: (тексто-графические материалы). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 1-14. [Очное участие].
9. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Диагностика параметров заземления провода по собственным частотам колебаний переменного тока // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы III Всерос. Науч.-практ. Конф. С междунар. Участ., 4-6 декабря 2014 г., г. Стерлитамак /под общ. Ред. С.А. Мустафиной. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2014. С. 3-9. – 156 с. ISBN 978-5-86111-441-7.
10. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Идентификация сосредоточенных масс и коэффициентов жесткости пружин механической системы состоящей из n-струн по собственным частотам ее колебаний //XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство

Казанского (Приволжского) федерального университета, 2015. С. 98-100. – 4436 с.

11. Аксенова З.Ф., Ахтямов А.М. Идентификация сосредоточенных масс и коэффициентов жесткости пружин механической системы состоящей из  $n$ -струн по собственным частотам ее колебаний // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20 - 24 августа 2015 г.). - Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. С. 13. - 319 с.
12. Аксенова З.Ф. Сравнение собственных частот для однородной струны, рассматриваемой как граф, и непрерывной однородной струны. Математическое моделирование процессов и систем: Материалы IV Всерос. Науч.-практ. Конф. С междунар. Участ., 16-17 декабря 2015 г., г. Стерлитамак. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. С. 3 – 11.



АКСЕНОВА Зульфия Фильгатовна

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
МЕХАНИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ  
ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ СТРУКТУРЫ

Специальность:

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 24.02.16 г. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать ризографическая. Тираж 100 экз. Заказ 040.  
Гарнитура «TimesNewRoman». Отпечатано в типографии  
«ПЕЧАТНЫЙ ДОМЪ» ИП ВЕРКО.  
Объем 1п.л. Уфа, Карла Маркса 12 корп. 5,  
т/ф: 27-27-600, 27-29-123