

На правах рукописи

Шарафутдинова Гюзель Гафуровна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ И
ПЛАСТИН МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ
БИФУРКАЦИЙ**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Уфа – 2013

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ФГБОУ
ВПО "Башкирский государственный университет"

Научный руководитель **Юмагулов Марат Гаязович**
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой дифференциальных
уравнений ФГБОУ ВПО "Башкирский
государственный университет"

Официальные оппоненты **Ильгамов Марат Аксанович**
д-р физ.-мат. наук, профессор,
чл.-корр РАН, академик АН РБ,

Ячиков Игорь Михайлович
д-р технических наук, профессор,
кафедра вычислительной техники и
прикладной математики ФГБОУ
ВПО "Магнитогорский государственный
технический университет" им. Г. И. Носова

Ведущая организация **ФГБОУ ВПО "Оренбургский
государственный университет"**

Защита диссертации состоится "20 "декабря 2013 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет" по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. К. Маркса, д. 12, корп. 2 (конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан " 18 " ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф.

БУЛГАКОВА Г. Т.

Актуальность темы. Важность математического моделирования процессов деформирования стержней, пластин и оболочек, подверженных воздействию продольных и/или поперечных нагрузок, обусловлена как возникающей на практике необходимостью расчета тонкостенных конструкций, так и потребностями самой теории. К вопросам, связанным с необходимостью разработки соответствующих приближенных, аналитических и качественных методов исследования, приводят многие практические задачи в авиации, ракетостроении, судостроении, химическом машиностроении, металлургии, строительстве и т. д. Здесь особо важны разработки методов, позволяющих эффективно исследовать задачи о критических нагрузках, формах прогибов, о закритичном поведении тонкостенных конструкций.

Задачи о моделировании процессов деформирования для стержней, пластин и оболочек могут возникать в различных постановках. В классической постановке обычно рассматриваются шарнирно опертые стержни и пластины под действием продольной или поперечной нагрузки; здесь не учитывается возможность первоначального прогиба конструкции, предполагается, что она может свободно прогибаться в ту или иную сторону. Такой, например, является классическая задача Эйлера об устойчивости стержня. Задачи о деформировании стержней и пластин в классической постановке изучались многими авторами, которыми разработан ряд эффективных методов исследования. Среди них можно выделить таких ученых, как Алфутов Н.А., Бубнов И.Г., Вайнберг М.М., Галеркин Б.Г., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Новожилов В.В., Попов Е.П., Работнов Ю.Н., Тимошенко С.П., Ясинский Ф.С. и др.

Большое внимание уделяется исследованию задач о моделировании процессов деформирования тонкостенных конструкций на упругом основании и/или с упругим заполнителем при их сложном продольном и поперечном нагружении. Многолетние исследования и практика эксплуатации таких конструкций во многих отраслях промышленности показали их эффективность. Существенный вклад в исследование указанных задач внесли Астапов Н.С., Грибов А.П., Губанова И.И., Ильгамов М.А., Коренев Б.Г., Пановко Я.Г., Tanaka Masataka, Mitsumoto Toshiro, Zheng Zhundong, Katsikadelis J.T. и др.

В то же время недостаточно изученными представляются многие важные с практической и теоретических точек зрения задачи о моделировании процессов деформирования стержней и пластин, лежащих на упругом основании в ситуации, когда из-за наличия поперечных нагрузок имеется первоначальный прогиб конструкции. Здесь особый интерес представляет исследование явления потери устойчивости конструкций и моделирование их закритического поведения. В силу сложности возникающих уравнений актуальным представляется и разработка численных методов и соответствующих алгоритмов и программ. Таким образом, представляется актуальной разработка методов качественного и приближенного исследования математических моделей в задачах об изгибе стержней и пластин, лежащих на упругом основании с учетом и без учета первоначального прогиба. Важно, чтобы эти методы позволяли эффективно определять пороги устойчивости упругих стержней и пластин под действием внешней нагрузки, находить соответствующие им формы выпучивания, исследовать закритичное поведение стержней и пластин.

В математической постановке критическим нагрузкам в задачах об изгибе стержней и пластин отвечают точки бифуркации соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений. Современная теория бифуркаций владеет мощным и эффективным аппаратом исследования многих теоретических и практических задач. Здесь разработаны качественные и приближенные методы, позволяющие находить точки бифуркации, определять бифуркационные решения и их свойства, детально исследовать основные сценарии бифуркаций. Актуальным представляется использование методов современной теории бифуркаций в задачах моделирования процессов деформирования для стержней и пластин, лежащих на упругом основании и имеющих первоначальный прогиб. Такое использование позволит получить новые признаки потери устойчивости стержней и пластин, разработать приближенные и аналитические методы определения форм их прогибов, разработать компьютерные программы визуализации решений.

Целью диссертационной работы является математическое моделирование процессов деформирования стержней и пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и попереч-

ных нагрузок.

Для достижения указанной цели в диссертационной работе поставлены следующие **основные задачи**:

1. Разработать операторные схемы приближенного определения критических нагрузок в задачах изгиба стержней и пластин, основанных на методах теории локальных бифуркаций.
2. Разработать итерационные процедуры численного расчета форм прогиба стержней и пластин и получить на их основе асимптотические формулы для бифуркационных решений.
3. Разработать алгоритмы и комплекс программ для численного расчета критических нагрузок и закритичного поведения стержней и пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. Апробировать комплекс программ на примере задачи расчета критических давлений и форм прогиба подины алюминиевого электролизера.

Методы исследования. Используются методы теории локальных бифуркаций, метод функционализации параметра, методы приближенного решения операторных уравнений, метод Ньютона-Канторовича, метод Бубнова-Галеркина.

Основные научные результаты, полученные автором и выносимые им на защиту:

1. Операторные схемы приближенного определения критических нагрузок в задачах изгиба стержней и пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. Предлагаемые схемы основаны на топологических методах теории локальных бифуркаций
2. Основанные на методе Ньютона-Канторовича с возмущениями итерационные процедуры численного расчета форм прогиба стержней и пластин, позволяющие одновременно определить и соответствующие значения нагрузок.

3. Приближенные аналитические формулы для математического моделирования закритичного поведения стержней и пластин.
4. Алгоритмы и комплекс программ в среде MATLAB для численного расчета критических нагрузок и закритичного поведения стержней и пластин, лежащих на упругом основании.

Научная новизна результатов диссертационной работы определяется впервые проведенными исследованиями, в результате которых разработан математический аппарат для анализа процессов деформирования стержней и пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. При этом получены следующие новые научные результаты:

1. Предложены схемы математического моделирования процессов деформирования стержней и пластин, подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. В отличие от известных методов предлагаемые схемы учитывают как первоначальный прогиб конструкции, так и наличие упругого основания.

2. Разработаны качественные и аналитические методы определения критических нагрузок, позволяющие получить приближенные формулы для исследования закритичных форм равновесия стержней и пластин, лежащих на упругом основании. Эти методы основаны на итерационных процедурах, которые в отличие от других известных методов, позволяют одновременно определять функции прогиба и соответствующие значения нагрузок.

3. На основе предложенных итерационных процедур численного исследования процессов деформирования стержней и пластин разработаны новые алгоритмы и комплекс программ для расчета критических нагрузок и определения закритичных прогибов.

Практическая и теоретическая значимость диссертационной работы. В работе предложены и обоснованы операторные методы приближенного исследования бифуркационных задач в моделях изгибов стержней и пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. Предлагаемый метод может быть ис-

пользован для моделирования процессов деформирования стержней с переменной по длине жесткостью и пластин, сжатых двумя парами сил. Полученные результаты доведены до расчетных формул и программно реализованы в среде MATLAB. Предложенный комплекс программ позволяет численно рассчитать критические нагрузки, получить приближенное представление возможных форм прогиба. Предложенные схемы, процедуры и программы апробированы при решении практической задачи о деформировании подины алюминиевого электролизера.

Апробация диссертационной работы. Основные результаты диссертации докладывались на региональной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике (г. Уфа, БГУ, 30-31 октября 2003 г.), на VIII Уральской региональной научно-практической конференции (г. Магнитогорск, 18-19 марта 2004 г.), на международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (г. Стерлитамак, 24-28 июня 2008 г.), на всероссийской конференции с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения" (г. Стерлитамак, 27-30 июня 2011 г.), на научных семинарах кафедры математического моделирования (г. Уфа, БашГУ, руководитель — профессор Спивак С.И.), на международной конференции "Колмогоровские чтения - V. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2011)" (г. Тамбов, 10-14 октября 2011 г.)

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[10]; из них 4 - в рецензируемых журналах из списка ВАК.

Объем и структура диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, девяти параграфов, заключения. Общий объем диссертации составляет 108 страниц. Библиография содержит 104 наименования.

Краткое содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и основные задачи исследования, приводится обзор литературных источников, кратко излагается содержание работы.

В **первой** главе рассматриваются основные математические модели и соответствующие уравнения, описывающие изгибы стержней и пластин.

Приводятся краткие сведения из общей теории локальных бифуркаций, а также некоторые методы этой теории.

Одним из основных объектов исследования в диссертационной работе является математическая модель изгиба стержня, лежащего на упругом основании (см. Рис. 1). Эта модель приводит к краевой задаче

$$\begin{aligned} u'' &= \rho(s)(-\lambda u + f(u) + q)\sqrt{1 - (u')^2}, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь s — координата, совпадающая с искривленной осью стержня; u — прогиб стержня, $\rho(s)$ характеризует изменение жесткости по длине стержня, число λ и функция $q = q(s)$ характеризуют продольную и поперечную нагрузку соответственно, $f(u)$ — функция, характеризующая наличие упругого основания типа Винклера:

$$f(u) = \begin{cases} cu; & \text{если } u < 0, \\ 0; & \text{если } u \geq 0, \end{cases}$$

где c — коэффициент постели, $c > 0$.

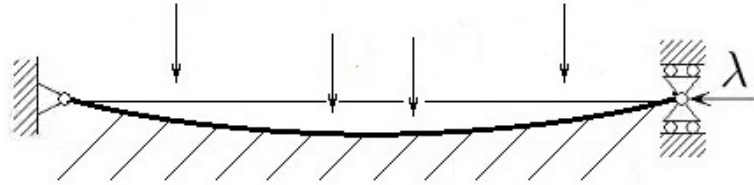


Рисунок 1.

Другим основным объектом исследования является математическая модель прогиба прямоугольной пластины P длины a и ширины b , сжатой вдоль оси y силами N_y , лежащей на упругом основании (см. Рис. 2).

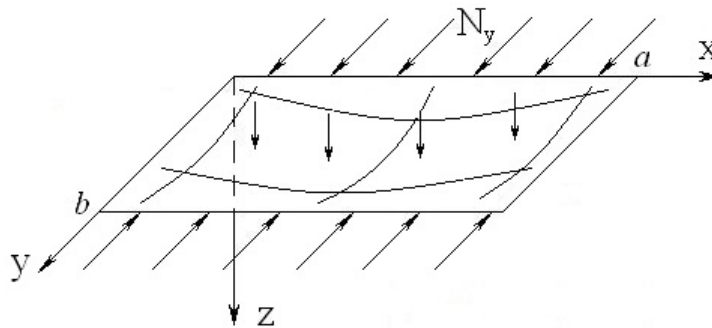


Рисунок 2.

Эта модель приводит к системе дифференциальных уравнений, связывающих функцию v напряжений (функцию Эйри) в срединной поверхности и функцию прогиба w пластины:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv d \cdot \Delta^2 w - hL(w, v) + f(w) - q = 0, \\ L_2 &\equiv \Delta^2 v + \frac{1}{2} E \cdot L(w, w) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, нелинейные операторы $L(w, v)$ и $L(w, w)$ определяются равенством

$$L(w, v) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (3)$$

d, h, E — известные положительные постоянные (d — жесткость на изгиб, h — толщина пластины, E — модуль упругости). Функция q характеризует поперечную нагрузку, а функция $f(w)$ — интенсивность реакции основания типа Винклера:

$$f(w) = \begin{cases} -cw; & \text{если } w < 0, \\ 0; & \text{если } w \geq 0. \end{cases}$$

Граничные условия, относящиеся к деформации в срединной поверхности, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, a \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ w = 0, \quad w_{xx} = 0; \\ \text{при } y = 0, b \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -N_y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ w = 0, \quad w_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Во **второй** главе приводятся приближенные методы исследования задач об изгибах стержней, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. Предлагаемые методы приводят к новым результатам и для классических задач.

В § 2.1 проводится исследование критических сил в классической задаче Эйлера

$$u'' = -\lambda \rho(s) u \sqrt{1 - (u')^2}, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (5)$$

Задача (5) при всех значениях продольной нагрузки λ имеет нулевое решение $u(s) = 0$. При достижении λ некоторого критического значения $\lambda_1^* > 0$ прямолинейное состояние $u(s) = 0$ равновесия стержня теряет устойчивость и возникает новое криволинейное устойчивое состояние равновесия. Значение λ_1^* называют первой критической силой Эйлера.

Предлагается следующая операторная схема определения критической силы λ_1^* задачи (5) для случая, когда функция $\rho(s)$ имеет вид $\rho(s) = \rho_0(s) + \varepsilon(s)$, где $\rho_0(s), \varepsilon(s) \in L_2(0, 1)$, $\rho_0(s) > 0$, $\|\varepsilon(s)\|_{L_2} \leq \delta_0 \|\rho_0(s)\|_{L_2}$ при малом $\delta_0 > 0$.

Критическая сила λ_1^* задачи (5) является первым собственным значением линейной краевой задачи $y'' = -\lambda\rho(s)y$, $y(0) = y(1) = 0$. Предполагается известным первое собственное значение λ_0 линейной краевой задачи $y'' = -\lambda\rho_0(s)y$, $y(0) = y(1) = 0$. Пусть $y_0(s)$ – соответствующая собственная функция. Для определения λ_1^* на первом этапе вводятся следующие вспомогательные числа, функции и операторы.

1. Положим

$$\mu_0 = \frac{1}{\lambda_0}, \quad e_0(s) = \lambda_0 \rho_0(s) y_0(s);$$

функцию $e_0(s)$ нормируем условием $\|e_0(s)\|_{L_2} = 1$.

2. Определим действующие в пространстве $L_2[0, 1]$ линейные интегральные операторы

$$Bz(s) = \rho(s) \int_0^1 G(s, \sigma) z(\sigma) d\sigma, \quad B_0 z(s) = \rho_0(s) \int_0^1 G(s, \sigma) z(\sigma) d\sigma,$$

где

$$G(s, \sigma) = \begin{cases} \sigma(1-s); & 0 \leq \sigma \leq s, \\ s(1-\sigma); & s \leq \sigma \leq 1. \end{cases} \quad (6)$$

3. Определим операторы

$$G(z(s)) = B_0 z(s) - \mu_0(z, e_0) z(s), \quad D(z(s)) = (B - B_0) z(s),$$

$$Fz(s) = B_0 z(s) - \mu_0 z(s) - \mu_0(z, e_0) e_0(s);$$

здесь (z, e_0) означает скалярное произведение функций $z(s)$ и $e_0(s)$.

4. Положим $\Gamma = F^{-1} : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ и по функции $z_0(s) = e_0(s)$ определим итерации

$$z_{n+1}(s) = z_n(s) - \Gamma \left(G(z_n(s)) + D(z_n(s)) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_n = (z_n, e_0) \mu_0.$$

Теорема 0.1. При малых $\delta_0 > 0$ числовая последовательность μ_n сходится к числу $\mu^* = \frac{1}{\lambda_1^*}$, при этом существует такое число $c_0 > 0$, что верна оценка: $|\mu_n - \mu^*| \leq c_0 \delta_0^{n+1}$.

В § 2.2 проводится исследование закритичного поведения стержня в задаче Эйлера (5). Пусть λ_1^* – первая критическая сила этой задачи. Пусть $y_1^*(s)$ – соответствующая собственная функция. Предлагается следующая схема определения форм прогиба стержня при $\lambda > \lambda_1^*$.

1. Определим вспомогательные числа и функции:

$$e_0(s) = \lambda_1^* \rho(s) y_1^*(s), \quad \|e_0(s)\|_{L_2} = 1;$$

$$b_0(s) = -\frac{1}{2} \lambda_1^* \rho(s) \int_0^1 G(s, \sigma) e_0(\sigma) d\sigma \left[\int_0^1 G'_s(s, \sigma) e_0(\sigma) d\sigma \right]^2;$$

$$K_0 = \int_0^1 b_0(s) e_0(s) ds.$$

2. Линейное интегральное уравнение

$$h(s) - e_0(s) \int_0^1 h(\sigma) e_0(\sigma) d\sigma - \lambda_1^* \rho(s) \int_0^1 G(s, \sigma) h(\sigma) d\sigma = b_0(s) \quad (7)$$

имеет в пространстве $L_2[0, 1]$ единственное решение $h(s) = e_1(s)$.

Теорема 0.2. Пусть λ_1^* – первая критическая сила λ_1^* задачи (5). Тогда закритичное поведение стержня описывается функциями, заданными в параметрическом виде $u = u^*(s, \varepsilon)$ и $\lambda = \lambda^*(\varepsilon)$, где

$$\lambda^*(\varepsilon) = \lambda_1^* - \lambda_1^* K_0 \varepsilon^2 + \varphi(\varepsilon), \quad u^*(s, \varepsilon) = \int_0^1 G(s, \sigma) z^*(\sigma, \varepsilon) d\sigma;$$

здесь $z^*(s, \varepsilon) = \varepsilon e_0(s) + \varepsilon^3 e_1(s) + z_1(s, \varepsilon)$, а функции $\varphi(\varepsilon)$ и $z_1(s, \varepsilon)$ удовлетворяют соотношениям: $\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ и $\|z_1(s, \varepsilon)\|_{L_2} = o(\varepsilon^3)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В § 2.3 предлагается операторная схема исследования критических нагрузок и закритичного поведения стержня в задаче (1). Пусть известно решение $u = u_0(s, \lambda, q)$ этой задачи такое, что $u_0(s, 0, 0) \equiv 0$ и функция $u_0(s, \lambda, q)$ непрерывна по совокупности переменных $s \in [0, 1]$, $q \geq 0$ и $\lambda \geq 0$. При возникновении продольной нагрузки прогиб стержня $u_0(s, \lambda, q)$ начинает увеличиваться, а затем, при достижении некоторого критического значения λ_1^* стержень в результате жесткой бифуркации перейдет в новое устойчивое состояние равновесия, прогнувшись вверх. Рис. 3 иллюстрирует бифуркационную диаграмму задачи (1).

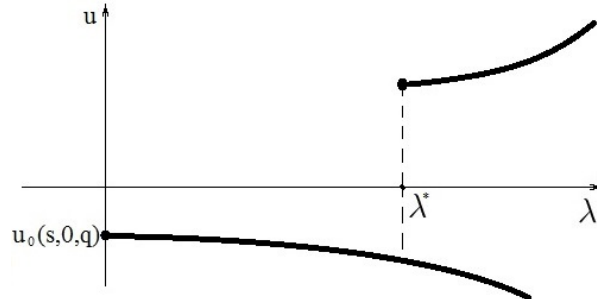


Рисунок 3.

Для нахождения критического значения λ_1^* определим оператор

$$B(\lambda)h = \rho(s) \left[(\lambda - c) \int_0^1 G(s, \sigma)h(\sigma)d\sigma + \right. \\ \left. + (f(u_0) + \lambda u_0 + q) u'_{0s} \int_0^1 G'_s(s, \sigma)h(\sigma)d\sigma \right].$$

Из общей теории бифуркаций следует, что число λ_1^* будет критическим значением задачи (1) тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора $B(\lambda_1^*)$ будет равен 1.

Теорема 0.3. Пусть $h_0(s) \in L_2[0, 1]$, $\|h_0(s)\|_{L_2} = 1$. Тогда последовательность

$$h_n(s) = \frac{B(\lambda)h_{n-1}(s)}{\|B(\lambda)h_{n-1}(s)\|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

сходится к собственной функции $h^*(s)$ оператора $B(\lambda)$, отвечающей спектральному радиусу $\rho(\lambda)$.

На втором этапе для выяснения вопроса о том, при каком значении λ спектральный радиус оператора $B(\lambda)$ будет равен 1, в диссертации предлагается использовать метод пристрелки.

В **третьей** главе приводятся приближенные методы исследования задач об изгибах пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок. А именно, рассматриваются задача (2)-(4) и ее модификации. Продольная сила N_y в указанных задачах рассматривается как параметр. В главе основным вопросом является определение критических нагрузок и исследование закритического поведения пластины.

В § 3.1 рассматривается задача (2)-(4). Эту задачу удобно преобразовать к иному виду. Положим $c(x, y) = x^2/2$ и определим функцию $F(x, y) = v(x, y) + N_y c(x, y)$. Тогда функции F и w являются решением следующей краевой задачи с однородными граничными условиями:

$$\widetilde{L}_1 \equiv d \cdot \Delta^2 w - h \cdot L(w, F) + h N_y L(w, c) = 0, \quad (8)$$

$$\widetilde{L}_2 \equiv \Delta^2 F + \frac{1}{2} E \cdot L(w, w) = 0; \quad (9)$$

$$\text{при } x = 0, a \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad w = 0, \quad w_{xx} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, b \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad w = 0, \quad w_{yy} = 0. \quad (10)$$

При любом значении параметра N_y задача (8)-(10) имеет тривиальное решение $w(x, y) \equiv 0$, $F(x, y) \equiv 0$. При достижении этим параметром некоторого критического значения N_y^* равновесное состояние пластины теряет устойчивость и пластина переходит к новому устойчивому состоянию равновесия. В рассматриваемой задаче наименьшая точка бифуркации N_y^* является первой критической силой Эйлера; ее значение определяется равенством $N_y^* = \frac{d\pi^2}{h} \cdot \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^4 b^2}$.

С целью описания закритичного поведения пластины, а именно, для получения асимптотических формул, описывающих нелинейные прогибы задачи (8)-(10), определим функцию

$$e_0 = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \text{где } C = \frac{2\sqrt{a^3 b^3}}{\pi^2(a^2 + b^2)}.$$

Далее, обозначим через A_0 оператор, ставящий в соответствие функции w решение F краевой задачи

$$\Delta^2 F = -\frac{1}{2}E \cdot L(w, w), \quad (11)$$

$$\text{при } x = 0, a \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0; \quad (12)$$

$$\text{при } y = 0, b \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Наконец, определим нелинейный оператор $Q(w) = 2hL(w, A_0(w))$.

Теорема 0.4. Пусть N_y^* – первая критическая сила задачи (8)-(10). Тогда закритичное поведение пластины описывается функциями, заданными в параметрическом виде $w = w(\varepsilon)$ и $N_y = N_y(\varepsilon)$, где

$$w(\varepsilon) = \varepsilon e_0 + \varepsilon^3 e_1 + o(\varepsilon^3), \quad N_y(\varepsilon) = N_y^* + \varepsilon^2 \lambda_1 + o(\varepsilon^2);$$

$$\text{здесь } \lambda_1 = -\frac{(Q(e_0), e_0)b^2}{h\pi^2}.$$

Вычисления показывают, что $\lambda_1 = \lambda_{11}/\lambda_{12}$, где

$$\lambda_{11} = 8192 \cdot Eab^3 \pi^2,$$

$$\lambda_{12} = (a^2 + b^2)^2 (\tilde{\lambda}^4 - 16\pi^4)^2 \left[\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \alpha^4 + 2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\tilde{\lambda}} \right)^2 \right];$$

здесь числа α и $\tilde{\lambda}$ определяются из соотношений

$$\cos \tilde{\lambda} \cdot \text{ch} \tilde{\lambda} = 1, \quad \alpha = \frac{\sin \tilde{\lambda} - \text{sh} \tilde{\lambda}}{\cos \tilde{\lambda} - \text{ch} \tilde{\lambda}}.$$

Для функции e_1 в работе также получено явное представление.

В § 3.2 рассматривается задача о прогибе пластины, лежащей на упругом основании, сжатой в двух направлениях и имеющей начальный прогиб. Математическая модель нелинейных прогибов такой пластин приводит к дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv d \cdot \Delta^2 w - hL(w, v) + f(w + u_0) + d\Delta^2 u_0 - hL(u_0, v) - q = 0, \\ L_2 &\equiv \Delta^2 v + \frac{1}{2} E \cdot L(w, w) + \frac{1}{2} E \cdot L(u_0, u_0) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $u_0 = u_0(x, y)$ — начальный прогиб.

Граничные условия, относящиеся к деформации в срединной поверхности, аналогичны (4). Для указанных задач предлагается операторная схема определения критических нагрузок, а также форм закритичного поведения. Эта схема аналогична той, что предложена для задач о прогибах упругого стержня.

В качестве **приложения** рассматривается задача об изгибе подины алюминиевого электролизера. Приводятся программы численного расчета, которые вычисляют функции, описывающие прогибы, и строят эти прогибы. Программы созданы в среде MATLAB. Схема конструкции алюминиевого электролизера представлена на Рис. 4. При термическом расширении подины со стороны ограниченных боковых стенок (бортов) возникает противодействие — реакции бортов, которые вызывают выпучивание и, как следствие, разрушение подины.

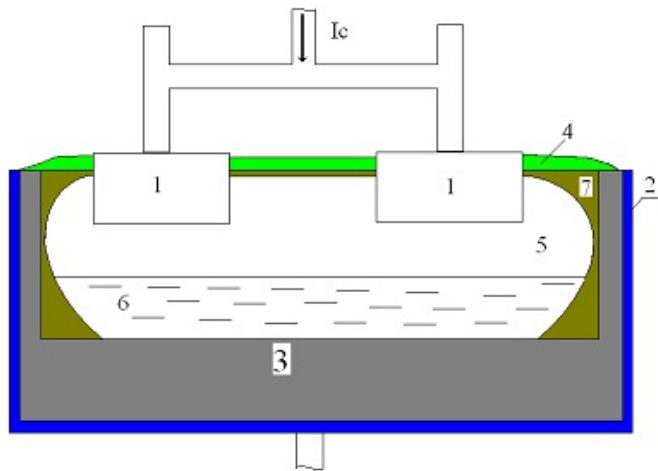


Рисунок 4.

Подину электролизера можно рассматривать как прямоугольную пластину длины a , ширины b и высоты h . Соответствующая математическая модель приводит к задаче (13) нахождения критических нагрузок N_y^* и определения форм прогибов при переходе параметра N_y через критическое значение N_y^* . В диссертации проведены численные расчеты при следующих физически значимых значениях параметров: $a = 9,400$ м, $b = 4,120$ м, $h = 0,400$ м, $E = 330$ Мпа, $\mu = 0,3$. Здесь E — модуль упругости материала, μ — коэффициент Пуассона. В этом случае получено критическое значение нагрузки $N_y^* = 3988096$ Па. Рис. 5 иллюстрирует прогибы подины при $N_y > N_y^*$, полученные с использованием программ численного расчета, разработанных в диссертации.

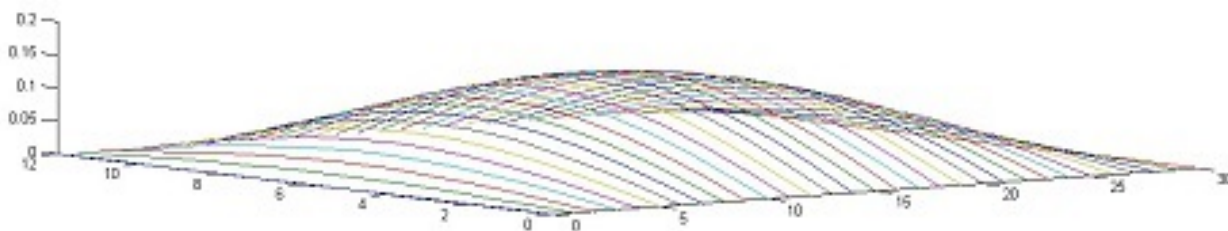


Рисунок 5.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. Разработаны операторные схемы, основанные на топологических методах теории локальных бифуркаций и позволяющие определить критические нагрузки и формы прогиба для стержней и пластин, лежащих на упругом основании и подверженных воздействию продольных и поперечных нагрузок.
2. Разработаны основанные на методе Ньютона-Канторовича с возмущениями итерационные процедуры численного расчета форм прогиба стержней и пластин.

3. Получены и обоснованы новые приближенные аналитические формулы для описания закритических форм равновесия стержней и пластин. Полученные формулы позволяют провести детальное математическое моделирование процессов деформирования стержней и пластин, лежащих на упругом основании и имеющих первоначальный прогиб.
4. Разработан комплекс программ для численного расчета критических нагрузок и закритического поведения стержней и пластин. Комплекс программ апробирован в задаче расчета критических давлений и форм прогиба подины алюминиевого электролизера.

ПУБЛИКАЦИИ ПО МАТЕРИАЛАМ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. *Шарафутдинова Г.Г.* Операторный метод решения задачи о формах изгиба стержня. Известия вузов. Математика. 2010. № 11. С. 86-91.
2. *Шарафутдинова Г.Г.* Исследование задачи о формах прогиба свободно опертой пластины при продольной нагрузке. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Т. 16, вып. 4, 2011. С. 1225-1227.
3. *Шарафутдинова Г.Г.* Задача о формах прогиба свободно опертой пластины при продольной нагрузке. Уфимский математический журнал. Т. 4, вып. 4, 2012. С. 155-161.
4. *Шарафутдинова Г.Г.* Приближенные методы решения задачи о формах потери устойчивости стержня, имеющего начальный прогиб. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Т. 18, вып. 6, 2013. С. 2743-2745.

В прочих изданиях

5. *Хабидуллина Г.Г.* Метод Галеркина решения задачи Кармана для упруго сжатой пластины. Региональная школа-конференция для студен-

- тов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Тезисы докладов. г. Уфа, 30-31 октября 2003 г. // Уфа: БашГУ, 2003. С. 29-30.
6. *Хабидуллина Г.Г.* Метод решения задачи о формах прогиба упруго сжатой пластины. VIII Уральская региональная научно-практическая конференция. г. Магнитогорск, 18-19 марта 2004 г. // Магнитогорск: МГТУ, 2004. С. 30-32.
 7. *Шарафутдинова Г.Г.* Об одном методе решения задачи Эйлера о формах изгиба стержня. Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании. Сборник материалов научно-практической конференции. Сибай, 23-24 мая 2008 г. // Сибай: СИ БГУ, 2008. С. 86-90.
 8. *Шарафутдинова Г.Г.* Асимптотика решения задачи Эйлера о формах изгиба стержня. Труды международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”, г. Стерлитамак, 24-28 июня 2008 г. // Стерлитамак: СГПА, 2008. С. 232-236.
 9. *Шарафутдинова Г.Г.* Расчет главных асимптотик решения задачи Эйлера о формах потери устойчивости стержня при продольной нагрузке. Труды Всероссийской научной конференции с международным участием “Дифференциальные уравнения и их приложения”, 27-30 июня 2011 г. // Уфа: “Гилем”, 2011. С. 119-121.
 10. *Шарафутдинова Г.Г.* Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 18404. Программный комплекс, реализующий алгоритм численного решения задач об упругих изгибах стержней и пластин при продольной нагрузке. Институт научной и педагогической информации. Объединенный фонд электронных ресурсов “Наука и образование” 26 июня 2012 г.

ШАРАФУТДИНОВА Гюзель Гафуровна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН
МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ**

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 1,0. Усл. п. л. 1,0. Уч.-изд.л. 0,9.

Тираж 100 экз. Заказ № /13

Редакционно-издательский отдел
Стерлитамакского филиала БашГУ:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.

Отпечатано в полиграфическом участке
Стерлитамакского филиала БашГУ:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.