

На правах рукописи

Яковлев Андрей Александрович

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД В
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ**

05.13.18 - Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Уфа – 2013

Работа выполнена на кафедре математики ФГБОУ ВПО «Уфимский
государственный авиационный технический университет» и в
ООО «РН-УфаНИПИнефть»

Научный консультант: д-р физ.-мат. наук, проф.
Байков Виталий Анварович

Официальные оппоненты: д-р физ.-мат. наук, проф.
Болсинов Алексей Викторович, проф. каф.
дифференциальной геометрии и приложений
ФГБОУ ВПО «Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова»
д-р физ.-мат. наук, проф.
Новокшенов Виктор Юрьевич, г.н.с.
Института математики с вычислительным
центром Уфимского научного центра РАН
д-р физ.-мат. наук, проф.
Федоров Константин Михайлович, ректор
НОУ «Академия инжиниринга нефтяных и
газовых месторождений»

Ведущая организация: Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита диссертации состоится 22 ноября 2013 года в 10 часов
на заседании диссертационного совета Д 212.288.06
при Уфимском государственном авиационном техническом университете
по адресу: 450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уфимского государственного
авиационного технического университета

Автореферат разослан " ____ " октября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р. физ.-мат. наук, проф.

Г.Т. Булгакова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Настоящая диссертация посвящена разработке математических методов моделирования и анализа неоднородных анизотропных сред, разработке качественных и численно-аналитических методов исследования статистических свойств ансамбля течения жидкостей и газов на основе классических уравнений подземной гидромеханики.

В настоящее время при планировании и мониторинге разработки месторождений углеводородов практически ни одна компания не обходится без построения трехмерных цифровых геолого-гидродинамических моделей. Это обусловлено, в частности, тем, что в последнее время акцент при разработке, планировании и мониторинге нефтегазовых месторождений смещается на сверхвысокорасчлененные и низкопроницаемые коллектора. Для оценки экономической эффективности, надежного размещения эксплуатационных скважин и прогнозирования уровней добычи углеводородов необходимо количественное представление об изучаемом, в том числе геологическом, объекте, нужна математическая мера геологического описания и математические модели геологического представления сложения месторождения. Основной задачей геостатистики (ветви математической геологии) является пространственная оценка входных данных и поиск возможных зависимостей. Задачей геостохастического моделирования является описание и воспроизведение непрерывности в пространстве природных процессов и явлений. Основные гипотезы геостохастического моделирования — стационарность и изотропность (их ослабления: тренд плюс стационарный остаток и геометрическая анизотропия), эргодичность и гауссовость случайного поля. Однако ни стационарность, ни изотропность в своих строгих формах почти не встречаются при работе с реальными данными. Более того, часто не помогают и предложенные ослабления этих гипотез при моделировании высокорасчлененных низкопроницаемых коллекторов.

Таким образом, для увеличения доли извлекаемых запасов из низкопроницаемых и высокорасчлененных коллекторов необходимы пересмотр и адаптация принятых математических методов геолого-гидродинамического моделирования. Процесс настройки геолого-гидродинамической модели заключается в подборе параметров модели исходя из стационарных данных по скважинам, например, каротажных кривых, лабораторных исследований керна, данных бурения, и динамических данных, например, дебитов скважин во времени или показания забойного манометра. Как правило, на практике эта задача решается путем численного моделирования серии прямых ресурсоемких задач. При оптимизации процесса геолого-гидродинамического моделирования

путем ограничения серии прямых задач возникает проблема создания списка топологических, геометрических, фрактальных и других характеристик неоднородных анизотропных сред и их влияния на дальнейшее использование модели. Подобного рода задачи относят к задачам геометрии случайных полей.

Интерпретация данных измерения проницаемости по керну высокорасчлененных коллекторов выявляет их цикличное, неоднородное строение, переслаивание песчаных, глинистых прослоев. Это означает невозможность проведения ремасштабирования сетки цифровой геологической модели при переходе к гидродинамической путем ее геометрического закругления без учета контраста проницаемостей по неоднородным прослоям. Данная задача тесно сопряжена с задачами усреднения дифференциальных операторов и исследования адиабатических пределов. Под адиабатическими асимптотическими задачами в теории дифференциальных операторов понимаются задачи исследования асимптотического поведения свойств самосопряженного эллиптического дифференциального оператора в частных производных, зависящего от малого параметра, в случае, когда малый параметр входит только в коэффициенты, стоящие перед производными по отношению к выбранной группе переменных (см., например, ¹). Для детального изучения процесса фильтрации в неоднородных анизотропных средах необходимо иметь явные примеры поведения свойств уравнения фильтрации на модельных многообразиях в адиабатическом пределе.

Таким образом, проблема разработки новых математических методов моделирования нестационарных анизотропных случайных полей, разработка качественных и численно-аналитических методов исследования поведения решений системы дифференциальных уравнений модели фильтрации в неоднородных анизотропных средах и связи поведения решения с характеристиками среды, исследования адиабатических пределов дифференциального оператора фильтрации является актуальной, интересной и важной задачей.

Степень ее разработанности

Вопрос о выделении научной дисциплины, которая представила бы математическую меру геологического описания и математические модели геологического представления сложения месторождения, решала бы задачи геологии математическим путем, был поставлен впервые около 65 лет тому назад ². Сама эта дисциплина, недостаточно точно определенная, была названа “аналитической геологией”. В начале 60-х годов по ряду причин название аналитическая геология было заменено названием

¹Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.

²Вистелиус А.Б. Основы математической геологии. Л.: Наука, 1980.

“математическая геология”. Исторически сложилось, что Жорж Матерон из Центра Геостатистики Парижской Горной Школы и его ученики расширили и популяризовали прикладные методы геостохастического моделирования, например, параметрический вариограммный анализ и последовательное гауссово моделирование, которые легли в основу современных пакетов геологического моделирования ³.

В современной статистической подземной гидромеханике при исследовании сложных неоднородных задач фильтрации жидкостей, газов и их смесей в природных пластах подразумевается, что пласты представляют собой случайные поля в смысле, принятом в теории вероятности. Иначе говоря, пласты представляют собой конкретные реализации случайных полей, характеризуемые определенными вероятностными характеристиками. При этом осреднение гидродинамических характеристик фильтрационных полей можно понимать, как теоретико-вероятностное осреднение по соответствующему статистическому ансамблю. На практике для решения подобных задач используются два подхода. Первый из них можно отнести к теории возмущений, получение приближенного решения для исследуемого объекта в каком-то смысле близкому к идеальному, для которого имеется точное решение. В случае отсутствия близкого идеального объекта, например, в виду сложности неоднородной анизотропной среды или необходимости получения приближенного решения для конечных временных интервалов, используют второй подход, иногда именуемый монтекарловским, осреднение ансамбля численно-аналитических решений. В связи с развитием ЭВМ все более популярным становится второй подход. Однако для эффективного его использования требуется адаптация математических методов моделирования и численных алгоритмов к современным параллельным вычислительным системам.

Связь фильтрационного процесса, стохастических дифференциальных уравнений (уравнение Фоккера - Планка) и римановой структуры (оператор Лапласа ассоциирован с римановой метрикой) ^{4, 5} позволяет получить детальную информацию о гидродинамических характеристиках фильтрационных полей.

Междисциплинарный подход к разработке математических методов построения реализаций нестационарных анизотропных случайных полей, разработке качественных и численно-аналитических методов исследования поведения решений системы дифференциальных уравнений модели фильтрации в неоднородных анизотропных средах и связи поведения решения с характеристиками среды позволяет по новому исследовать задачи подземной

³Deutsch C.V., Journel A.G. GSLIB, Geostatistical software library and User's guide. — New York: Oxford university press, 1992. 340 p.

⁴Kolmogoroff A., Zum Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze // *Math. Ann.* - 1937. Т.113, №5. -С. 766–772.

⁵Феллер В., О решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа // *УМН* - 1941. № VIII, С. 232–248.

гидромеханики и открывает новые возможности для их решения.

Цель работы

Целью настоящей работы является разработка математических методов моделирования и исследования неоднородных анизотропных сред в статистической подземной гидромеханике для планирования и мониторинга разработки нефтегазовых месторождений.

Для ее достижения были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработать математические методы стохастического моделирования и статистической непараметрической оценки вероятностных характеристик нестационарных анизотропных случайных полей, учитывающие известные дискретные значения реализации и априорную информацию о геометрическом строении реализаций случайного поля.

2. Разработать качественные и численно-аналитические методы исследования математических моделей фильтрации в неоднородных анизотропных средах, учитывающие фрактальные, топологические, геометрические особенности строения области фильтрации.

3. Разработать математические методы проверки адекватности математической модели геологического строения нефтяного пласта на основе данных натурного эксперимента.

4. Развить качественные и приближенные аналитические методы исследования анизотропного однофазного уравнения фильтрации на модельных двух- и трехмерных многообразиях.

5. Разработать и реализовать численные алгоритмы стохастического моделирования и статистической непараметрической оценки вероятностных характеристик нестационарных анизотропных случайных полей, позволяющие эффективно проводить вычисления на современных параллельных вычислительных системах с различной архитектурой.

Научная новизна работы

1. Разработаны новые математические методы стохастического моделирования и статистической непараметрической оценки вероятностных характеристик нестационарных анизотропных случайных полей, учитывающие известные дискретные значения реализации и априорную информацию о геометрическом строении реализаций случайного поля, отличающиеся тем, что используется разложение случайного поля вдоль выбранного направления по определенному ортогональному базису. Коэффициенты такого разложения оцениваются и

вычисляются с учетом возможного тренда математического ожидания и дисперсии согласно спектральной теории стационарных случайных полей.

2. Разработаны качественные и численно-аналитические методы исследования математических моделей фильтрации в неоднородных анизотропных средах, учитывающие фрактальные, топологические, геометрические особенности строения области фильтрации.

3. Разработаны новые математические методы проверки адекватности математической модели геологического строения нефтяного пласта на основе динамических данных натурного эксперимента.

4. Исследовано поведение анизотропного однофазного уравнения фильтрации на конкретных модельных двух- и трехмерных многообразиях в адиабатическом пределе. Показано появление принципиально новых асимптотических свойств оператора Лапласа в адиабатическом пределе, полностью отличных от того, что известно в случае римановых слоений.

5. Разработан масштабируемый параллельный алгоритм стохастического моделирования нестационарных анизотропных случайных полей, позволяющий проводить вычисления по построению реализаций случайного поля на современных параллельных вычислительных системах с различной архитектурой, системах с общей памятью (многоядерные ПК), системах с распределенной памятью (кластер), а также гибридных вычислительных системах (с графическими процессорами).

Теоретическая и практическая значимость

Теоретические положения диссертации могут быть использованы при разработке математических методов геостохастического моделирования и геостатистического анализа, в статистической подземной гидромеханике, в теории дифференциальных уравнений в частных производных, спектральной теории дифференциальных операторов, в дифференциальной геометрии и в теории чисел.

Разработанный программный модуль геостохастического моделирования и геостатистического анализа нестационарных анизотропных случайных полей интегрирован в рабочий процесс геолога по построению цифровых геологических моделей, снижает степень исследовательского субъективизма при построении цифровой геологической модели, обеспечивает высокую прогнозоспособность цифровой геологической модели высокорасчлененных низкопроницаемых пластов нефтегазовых месторождений. Способы контроля за разработкой пластов, использующие разработанные математические методы моделирования

неоднородных анизотропных сред для надежного определения фильтрационно-емкостных свойств пласта, зарегистрированы в Государственном реестре изобретений [15], [16].

Разработанный метод вычисления численно-аналитических зависимостей геолого-гидродинамических характеристик пласта от статистических топологических и геометрических характеристик цифровой геологической модели позволяет эффективнее осуществлять выбор месторождений аналогов при принятии технико-экономических решений.

Программная реализация масштабируемого параллельного алгоритма геостохастического моделирования, качественные и приближенные аналитические методы учета пространственной неоднородности фильтрационно-емкостных свойств пласта на порядок сокращают время вычислительного эксперимента, что в свою очередь позволяет использовать многовариантное полномасштабное геолого-гидродинамическое моделирование, как следствие, повышает эффективность контроля за разработкой, надежность обоснования размещения эксплуатационных скважин.

Методология и методы исследования

В работе применяются методы математического моделирования, теории вероятности, спектральной теории стационарных случайных полей, математической статистики, теории многофазной фильтрации, обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, теории дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории операторов.

Положения, выносимые на защиту

1. Математические методы стохастического моделирования и статистической непараметрической оценки вероятностных характеристик нестационарных анизотропных случайных полей, учитывающие известные дискретные значения реализации и априорную информацию о геометрическом строении реализаций случайного поля.

2. Качественные и численно-аналитические методы исследования математических моделей фильтрации в неоднородных анизотропных средах, учитывающие фрактальные, топологические, геометрические особенности строения области фильтрации.

3. Математические методы проверки адекватности математической модели геологического строения нефтяного пласта на основе динамических данных натурального эксперимента.

4. Качественные и приближенные аналитические методы исследования

анизотропного однофазного уравнения фильтрации на модельных двух- и трехмерных многообразиях.

5. Численные алгоритмы стохастического моделирования и статистической непараметрической оценки вероятностных характеристик нестационарных анизотропных случайных полей, позволяющие эффективно проводить вычисления на современных параллельных вычислительных системах с различной архитектурой.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается тем, что предложенные в диссертации математические методы моделирования и вытекающие из них результаты основаны на общих законах и уравнениях подземной гидромеханики, физически обоснованных гипотезах и упрощениях, на строгости математических доказательств. Апробация реализованных математических методов стохастического моделирования и статистической оценки вероятностных характеристик нестационарного случайного поля в виде комплекса программ для проведения численного эксперимента по оценке и воспроизведению внутренней структуры неоднородности геологического строения показала на участках нефтяных месторождений Западной Сибири достаточную точность воспроизведения фактических скважинных данных.

Результаты диссертационной работы использованы в НИР по 5 грантам РФФИ и гранту президента РФ “Ведущие научные школы”, в двух из которых автор был научным руководителем.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: Семинаре “Трехмерные цифровые геолого-гидродинамические модели месторождений УВС: современное состояние, оценка качества, требования ЦКР Роснедр по УВС”, ФГУП “ВНИГНИ”, Москва, февраль 2013 г.; Общеинститутском семинаре Института математики с ВЦ УфНИЦ РАН, Уфа, апрель 2011 г.; Семинаре “Современные проблемы прикладной математики и физики” УГАТУ, рук. В.А. Байков, Уфа, 2009-2013 г.; Семинаре “Геометрия и топология” Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, рук. И.А. Тайманов, Новосибирск, сентябрь 2007 г., сентябрь 2009 г., март 2012 г., май 2013 г.; Семинаре “Дифференциальные уравнения математической физики” Института математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, март 2005 г., ноябрь 2007 г.; Семинаре кафедры математики УГАТУ, Уфа, ноябрь 2007 г., июнь 2013 г.; Научно-технических советах ОАО “НК-Роснефть” 2010-2012 г.; Международном семинаре “Неньютоновские системы в нефтегазовой отрасли” памяти Мирзаджанзаде А.Х., Уфа, ноябрь 2012 г.; Семинаре “Асимптотический анализ случайных процессов и полей”, МГУ

рук. Булинский А. В., Москва, 2010 г.; Семинаре “Топология и анализ” МГУ, рук. А.С. Мищенко, Е.В. Троицкий, В.М. Мануйлов, Москва, октябрь 2007 г.; Семинаре “Современные геометрические методы” МГУ, рук. А.Т. Фоменко, октябрь 2007 г.; Семинаре Университета Сантьяго де Компостела, Испания, Сантьяго де Компостела, сентябрь 2006 г.; Conference K-theory, C^* -algebras, index theory, Georg-August-University Goettingen, Goettingen, Germany, November, 2010 г.; Семинаре “Инновационные технологии для топливно-энергетического комплекса России”, НЦ РИТ, Москва, 2010 г.; VI Уфимской международной конференции “Комплексный анализ и дифференциальные уравнения”, посвященной 70-летию чл.-корр. РАН В.В. Напалкову, октябрь 2011 г.; X юбилейной научно-практической конференции “Геология и разрабатка месторождений с трудноизвлекаемыми запасами”, ОАО НК Роснефть, Нефтяное хозяйство, Геленджик, сентябрь 2010 г.; XI практической конференции “ ROX-AR в России и СНГ”, ROXAR, Анталья, Турция, октябрь 2010 г.; Российской конференции “Многофазные системы: природа, человек, общество, технологии”, посвященной 70-летию академика Р.И. Нигматулина, Институт механики УНЦ РАН, Уфа, июнь 2010 г.; Научно-практической конференции “Математическое моделирование и компьютерные технологии в разработке месторождений”, Уфа, апрель 2010 г., апрель 2011 г.; Конференции по обмену опытом в инновационной деятельности НК «Роснефть» в области добычи нефти, Самара, июль 2011 г.; Конференции “Современные информационные технологии в нефтяной и газовой промышленности”, Кипр, октябрь 2011; Научно-практической конференции “Суперкомпьютерные технологии в нефтегазовой отрасли”, МГУ, Москва, декабрь 2011 г.; Технической конференции “Взаимодействие геологической и гидродинамической моделей”, SPE, Москва, март 2010 г.; Всероссийской конференции “Роль адаптации гидродинамических моделей в надежности прогноза технологических показателей разработки”, Национальный центр развития инновационных технологий, Москва, март 2009 г.; Международной конференции “Нелинейные уравнения и комплексный анализ”, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкортостан, Южный Урал, декабрь 2009 г., март 2012 г.; Всероссийской конференции “Современные методы геологического моделирования”, Национальный центр развития инновационных технологий, Москва, апрель 2009 г.; Международной конференции “Современные проблемы анализа и геометрии-2009”, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, сентябрь 2009 г.; Международной конференции “ C^* -алгебры и эллиптическая теория”, Польша, Бедлево, январь 2006 г.; Уфимской конференции “Комплексный анализ и дифференциальные уравнения”, Якты-Куль, декабрь 2006 г.; Международной конференции “Операторные алгебры и топология”, МГУ, Москва, январь 2007 г.; Международной конференции

“Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной памяти И.Г. Петровского, Москва, май 2007 г.; Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти А.Ф. Леонтьева, Уфа, июнь 2007 г.; Третьей Российско-германской конференции, посвященной 95-летию со дня рождения А.Д. Александрова, С.-Петербург, июнь 2007 г.; Российской конференции “Математика в современном мире”, посвященной 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, сентябрь 2007 г.; Международной конференции “Спектральная Теория и Глобальный Анализ”, Университет имени Карла фон Оссиецкого, Ольденбург, Германия, август 2006 г.; Региональной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике, БашГУ, Уфа, ноябрь 2004 г., декабрь 2005 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 37 работах, в том числе, статьи [1-14] опубликованы в рецензируемых журналах из перечня ВАК, 1 монография [17], 2 патента РФ на изобретение [15,16] и 2 свидетельства об официальной регистрации программы для ЭВМ.

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Автор выражает глубокую благодарность Кордюкову Ю.А. за полезные обсуждения и ценные рекомендации в ходе подготовки диссертации.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 181 наименование. Общий объем диссертации – 220 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сделан краткий обзор литературы, описаны постановки задач, методы исследования и кратко изложены полученные результаты.

В первой главе изложен математический метод моделирования нестационарных анизотропных сред, который основан на моделировании формы одномерных сечений дискретных данных реализации случайного поля вдоль заданного направления посредством распространения в трансверсальном направлении ее составляющих, определяемых теорией спектрального представления случайных функций. Квазистационарность предлагаемой модели предполагает учет зональной изменчивости, а используемый математический аппарат позволяет отказаться от параметрического вариограммного анализа, исключить условие геометрической анизотропии.

Пусть $G(u_1, u_2, h)$ — случайное поле определенное в пределах некоторого “куба”, $(u_1, u_2, h) \in D \times [-1, 1] \subseteq R^3$, а $\tilde{G}(u_1, u_2, h)$ — реализация данного случайного поля. Обозначим через $f_k(h)$ сечение реализации случайного поля,

а именно, $f_k(h) = (u_1^k, u_2^k, h)$, где $\{(u_1^k, u_2^k) \in D\}_{k=1}^N$. Выявление характерной формы кривой $f_k(h)$ осуществим посредством разложения функции $f_k(h)$ по базису классических ортогональных многочленов (например, по многочленам Лежандра, Чебышева первого и второго рода) $P_j(h)$, ортонормированных на $[-1, 1]$ с определенной весовой функцией

$$f_k(h) = S_{k,n}(h) + \Delta_k(h), \quad (1)$$

где $\Delta_k(h)$ – некоторый остаток,

$$S_{k,n}(h) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j^k P_j(h), \quad a_j^k = \int_{-1}^1 f_k(h) P_j(h) dh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Выбор базиса классических ортогональных многочленов обусловлен его полнотой, наличием простых рекуррентных формул для пересчета этих многочленов. Формула (1) представляет собой разложение кривой на низкочастотную (ряд Фурье по многочленам) и высокочастотную (остаток) составляющие. На практике определение использования конкретного базиса проводится исходя из постановки задачи, а именно, выбор базиса может быть обусловлен весовой функцией, как мерой доверия области определения анализируемой функции, анализом остатков и членов разложения.

В предлагаемом математическом методе моделирования реализаций нестационарных случайных полей

$$G(u_1, u_2, h) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_j(x) + \sigma_j(x) \eta_j(x)] P_j(h) + \Delta(x, h), \quad \max_x \sigma_j(x) = 1, \forall j, \quad (3)$$

где $\eta(x) = (\eta_0(x), \eta_1(x), \dots, \eta_{n-1}(x))^T$ – векторное стационарное гауссовское случайное поле с нулевым средним, $a(x) = (a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x))^T$ – вектор средних, $\sigma_j(x) \geq 0$ – масштабирующие функции. $\Delta(x, h)$ – высокочастотный шум, ортогональный функциям $P_j(h)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, малой мощности, что на практике можно обеспечить за счет выбора “хорошего” базиса и достаточно большого n . Тем самым основную информацию о сигнале $f_k(h)$ несет набор коэффициентов Фурье a_j^k . Несмотря на возможную негауссовость случайного поля $G(u_1, u_2, h)$ интеграл от него с весом $P_j(h)$ в широких и достаточно слабых предположениях можно приближенно считать гауссовским (в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей), однако в случае наличия достаточной статистики необходимо данное условие проверять.

Функцию $a(x)$ можно оценить сглаживанием соседних значений поля $\xi(x)$. Обозначим также через $\hat{a}(x)$ сглаженную оценку среднего по методу ближайших k -соседей

$$\hat{a}(x) = \frac{\sum_{j=1}^k \xi(x_j) (\max_{i=1, \dots, k} |x - x_i| - |x - x_j|)^\nu}{\sum_{j=1}^k (\max_{i=1, \dots, k} |x - x_i| - |x - x_j|)^\nu}, \quad (4)$$

здесь x_1, x_2, \dots, x_k – наиболее близкие к x (в евклидовой метрике $|\cdot|$) экспериментальные точки – точки скважин, $k, \nu > 0$ – варьируемые параметры. Отметим, что за счет конструкции среднего функция $\hat{a}(x)$ будет непрерывна по x . В тех областях, где мало или нет экспериментальных точек x_k имеется возможность пользоваться теми или иными математическими моделями, выражающими представления эксперта о характере убывания (возрастания) функции среднего.

Оценивание масштабирующих функций $\sigma_j(x)$ производится усреднением по формуле аналогичной (4) локальной оценки вариации поля $\eta_j(x)$

$$\sigma_j(x) = \frac{\sum_{j=1}^k D_j (\max_{i=1, \dots, k} |x - x_i| - |x - x_j|)^\nu}{\sum_{j=1}^k (\max_{i=1, \dots, k} |x - x_i| - |x - x_j|)^\nu}, \quad (5)$$

где $D_j = \sum_{q \in N_j} (\xi_j(x_q) - \hat{a}_j(x_q))^2$ и N_j – множество индексов, соответствующих скважинам близлежащим к скважинам с индексом j .

Для гауссовских случайных полей $\eta(x)$ справедливо простое важное свойство: случайное поле невязки $\Psi(x) = \eta(x) - \eta^*(x)$ и данные $\eta(x_k), k = 1, 2, \dots, N$ независимы, что открывает возможность моделирования поля $\Psi(x)$ независимо от исходных данных. Здесь $\eta^*(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \eta(x_k)$, где $\eta(x_k)$ – значения случайного поля $\eta(x)$ в экспериментальных точках, а константы (“веса”) $\lambda_k = \lambda_k(x)$ подбираются по методу кригинга, исходя из минимума среднеквадратичного отклонения линейной формы $\eta^*(x)$ от случайного поля $\eta(x)$

$$E(\eta(x) - \eta^*(x))^2 \longrightarrow \min_{\lambda_k}.$$

Отметим также, что вместо точного представления $\eta(x) = \Psi(x) + \eta^*(x)$ в результате моделирования мы получаем реализацию $\eta_1(x) = \Psi_1(x) + \eta^*(x)$, где поле $\Psi_1(x)$ есть независимая копия поля $\Psi(x)$. Получающаяся неопределенность в оценивании поля $\Psi(x)$ отражает имеющуюся неопределенность в определении рассматриваемой случайной среды.

Для моделирования невязки $\Psi(x) = \eta(x) - \eta^*(x)$ и построения функции кригинга $\eta^*(x)$ используются спектральные представления для стационарных случайных процессов и полей с нулевым средним:

$$\eta(x) = \int_{R^2} e^{i(x, \lambda)} d\Phi(\lambda), \quad (6)$$

$$C(u) = E\eta(x+u)\eta(x) = \int_{R^2} e^{i(u, \lambda)} dF(\lambda), \quad |d\Phi(\lambda)|^2 = dF(\lambda),$$

где $\Phi(\lambda), \lambda \in R^2$ – некоторое векторнозначное комплекснозначное случайное поле с ортогональными приращениями и нулевым средним. Ввиду гауссовости поля

$\eta(x)$ случайное поле $\Phi(\lambda)$ также гауссово, $C(u)$ – матрица ковариаций поля $\eta(x)$, $F(\lambda)$ – матричная спектральная функция распределения.

Итак, в соответствии с (6)

$$\delta(x) = \eta(x) - \eta^*(x) = \int_{R^d} \left(e^{i(x,\lambda)} - \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{i(x_k,\lambda)} \right) d\Phi(\lambda). \quad (7)$$

Ввиду того, что рассматриваемая невязка не зависит от функции кригинга $\eta^*(x)$, мы можем при моделировании выбирать поле $\Phi(\lambda)$ независимо от $\eta^*(x)$. Возьмем независимую копию $\Phi_1(\lambda)$ случайного поля $\Phi(\lambda)$ и построим поля:

$$\widehat{\delta}(x) = \int_{R^d} \left(e^{i(x,\lambda)} - \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{i(x_k,\lambda)} \right) d\Phi_1(\lambda), \quad \widehat{\eta}(x) = \widehat{\delta}(x) + \eta^*(x). \quad (8)$$

Отметим, что поле $\widehat{\eta}(x)$ является обусловленным и имеет такие же вероятностные характеристики, что и поле $\eta(x)$, но, вообще говоря, с ним не совпадает. Выбирая различные варианты $\Phi_1(\lambda)$ поля $\Phi(\lambda)$, мы, соответственно, получим различные варианты поля $\widehat{\eta}(x)$.

Для оценивания ковариационной функции и спектральной функции распределения поля $\eta(x)$, которые необходимы при построения функции кригинга и обусловленного стохастического моделирования, достаточно оценить соответствующую спектральную плотность распределения. При оценивании спектральной плотности воспользуемся периодограммой

$$I_D(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2|D|} \left| \int_D e^{-i(x,\lambda)} \eta(x) dx \right|^2,$$

где $|D|$ – площадь области D . Известно, что если спектральная плотность распределения $f(\lambda)$ непрерывна в точке λ_0 , то при неограниченном расширении области D $E I_D(\lambda_0) \rightarrow f(\lambda_0)$, при этом $I_D(\lambda)$ не является состоятельной оценкой спектральной плотности, однако линейные интегральные функционалы от нее состоятельно оценивают аналогичные линейные интегральные функционалы от спектральной плотности.

Непосредственное вычисление периодограммы в нашем случае невозможно, поэтому векторная периодограмма приближается соответствующей интегральной суммой следующего вида:

$$\widehat{I}_D(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2|D|} \left(\sum_{k=1}^n \eta(x_k) \int_{D_k} e^{-i(x,\lambda)} dx \right) \left(\sum_{k=1}^n \eta(x_k) \int_{D_k} e^{-i(x,\lambda)} dx \right)^T, \quad (9)$$

где $D_k, k = 1, 2, \dots, n$ – суть некоторые подобласти области D с центрами в точках x_k . Кроме того, нам требуется следующее усечение периодограммы:

$$I_D^*(\lambda) = \begin{cases} \widehat{I}_D(\lambda), & \lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]^2, \\ 0, & \lambda \notin [-\lambda_0, \lambda_0]^2, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{\min_{i,j} |x_i - x_j|}.$$

λ_0 – частота Найквиста, определяемая из следующего соображения: наименьшая длина волны, которую мы можем себе позволить оценивать по имеющимся данным, вдвое больше наименьшего расстояния между скважинами.

Наконец, для того, чтобы частично компенсировать погрешности, возникающие в (9), (10), перенормируем оценку (10), исходя из следующего свойства спектральной плотности:

$$\int_{R^2} f(\lambda) d\lambda = E\eta(x)\eta(x)^T \approx \frac{1}{|D|} \int_D \eta(x)\eta(x)^T dx \approx \frac{1}{|D|} \sum_{k=1}^n \eta(x_k)\eta(x_k)^T |D_k| \stackrel{def}{=} C_0,$$

так что в качестве оценки спектральной плотности можно взять величину

$$\widehat{f(\lambda)} = C_0^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} I_D^* R^{-\frac{1}{2}} C_0^{\frac{1}{2}},$$

где

$$R = \int_{R^2} I_D^*(\lambda) d\lambda.$$

Ковариационная функция и полувариограмма вычисляются по формулам:

$$\widehat{C(u)} = \int_{R^2} e^{-i(u,\lambda)} \widehat{f(\lambda)} d\lambda, \quad \gamma(u) = \widehat{C(0)} - \widehat{C(u)} = C_0 - \widehat{C(u)}.$$

Отметим, что поведение ковариационной функции (и вариограммы) в нуле нам неизвестно, поскольку нет соответствующих данных, поэтому в окрестности нуля ее можно переопределить исходя из фрактальных свойств поля $\eta(x)$, вытекающих из соответствующих теоретических и эмпирических представлений.

Вторая глава посвящена численным алгоритмам моделирования неоднородных анизотропных сред и приложениям в задачах подземной гидромеханики.

В первом разделе второй главы приведены численные алгоритмы процедур оценивания всех составляющих элементов разработанного математического метода моделирования нестационарной анизотропной модели геофизического поля с учетом априорной информации о статистических геометрических характеристиках. Разработаны математические методы моделирования остатка $\Delta(x, h)$.

Проведена модификация разработанного в первой главе математического метода моделирования, которая заключается в выявлении характерной формы

$f_k(h)$, характеризующей реализацию случайного поля посредством определения коэффициентов разложения ее по базису вейвлетов. Использование такого представления вызвано тем, что на практике оно позволяет осуществить обоснованный анализ неоднородных анизотропных сред не обязательно в определенном заданном направлении. Более того, данные сечения не обязаны быть известны во всем интервале, при этом учитывается локальная неоднородность среды по разрезу. Приложение данного метода к цифровому геологическому моделированию приводит к надежному определению фильтрационно-емкостных характеристик пласта и взаимного расположения частей, составляющих пласт, повышает надежность контроля за разработкой месторождений с высокой расчлененностью пластов, повышает результативность буровых работ, сокращает риски некорректной оценки технологических показателей при построении геолого-гидродинамических моделей. Определение фильтрационно-емкостных характеристик пласта осуществляется на данных геофизических исследований скважин, проводимых в скважинах без дополнительных ограничений на величину угла отхода скважины от вертикали, возможно вскрывающих не весь пласт и не обязательно на всем интервале пласта.

Компьютерное моделирование поля $\widehat{\delta}(x)$ производится путем замены интеграла в (8) соответствующими интегральными суммами

$$\widehat{\delta}(x) \approx Re \sum_{j \in J \in Z^2} \left(e^{i(x, \tau_j)} - \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{i(x_k, \tau_j)} \right) \Delta \Phi_j,$$

где $\Delta \Phi_j = U_j + iV_j, j \in J$ – гауссовские комплекснозначные вектора с нулевыми средними,

$$\Delta \Phi_{-j} = \overline{\Delta \Phi_j}, \quad EU_j = EV_j = 0,$$

$$Cov(U_j, V_i) = 0, \forall i, j \quad Cov(U_i, U_j) = 0, \forall i \neq j, -j, \quad Cov(V_i, V_j) = 0, \forall i \neq j, -j,$$

$$Cov(U_j, U_j) = Cov(V_j, V_j) = \frac{1}{2} \int_{B_j} dF(\lambda),$$

где B_j – элементы разбиения, $\tau_j \in B_j$.

Отметим, что вычисления по рассматриваемым формулам принципиально распараллеливаются при программировании. Точность определения интеграла (8) ограничивается нашими вычислительными возможностями.

Во втором разделе второй главы изложен масштабируемый параллельный алгоритм стохастического моделирования нестационарных анизотропных случайных полей, позволяющий проводить вычисления по построению реализаций случайного поля на современных параллельных вычислительных системах с различной архитектурой, системах с общей памятью

(многоядерные ПК), системах с распределенной памятью (кластер), а также гибридных вычислительных системах (с графическими процессорами). Рассмотрены вопросы выбора элементов разбиения B_j и $\tau_j \in B_j$.

Разработана параллельная версия [18] геостатистического симулятора [17], позволяющая проводить вычисления на гибридных вычислительных системах с общей памятью и графическими процессорами NVIDIA с поддержкой CUDA. Распараллеливание в модели общей памяти реализовано средствами интерфейса OpenMP, а с помощью технологии PGI Accelerator произведена адаптация для выполнения на GPU наиболее трудоемких участков кода программы, выделенных в виде функций, решающих следующие вычислительные задачи: построение матрицы ковариации, выполнение быстрого преобразования Фурье, а также обусловленного стохастического моделирования. Тестирование производительности полученной версии симулятора при расчете реальной модели на двухпроцессорной рабочей станции FSC CELSIUS V840 на базе процессоров AMD Opteron 2214 с различными графическими ускорителями NVIDIA: GeForce 295, 460, 470, 480 GTX и Tesla C1060 показало ускорение суммарного времени выполнения адаптированных участков кода при расчете на CPU+GPU относительно суммарного времени их выполнения при расчете на 4 ядрах центральных процессоров (CPU). В результате максимальное ускорение было достигнуто при использовании GeForce 480 GTX и составило более 8 раз. Проведена адаптация симулятора к более современным гибридным вычислительным системам на основе графических процессоров NVIDIA. Благодаря предоставленному доступу к вычислительным ресурсам Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН, были проведены работы по тестированию производительности и оптимизации симулятора на высокопроизводительном вычислительном сервере Kraftway Science KT25. В случае одного потока подключение к расчету графического ускорителя позволяет сократить время в 26 раз. Кроме того, сравнение минимальных времен выполнения адаптированных функций на CPU и CPU+GPU показывает, что за счет использования графических процессоров минимальное время выполнения (расчет на всех 12 процессорных ядрах) может быть сокращено более чем в 9 раз (расчет на 4 процессорных ядрах при поддержке 4 графических ускорителей).

Третий раздел второй главы посвящен обеспечению заданного степенного поведения ковариационной функции в нуле моделью степенных хвостов спектральной плотности для заполнения внешней информацией о среде, исходя из ее фрактальных свойств, которые, в свою очередь, определяют важные показатели разработки нефтегазовых месторождений.

Связь поведения ковариации в нуле с естественными процессами отмечали

многие исследователи. Барроу ⁶ провел анализ обширного ряда измерений параметров окружающей среды и получил оценки фрактальных размерностей различных процессов. Например, фрактальная размерность содержания натрия в почве — от 1,7 до 1,9, камней — от 1,1 до 1,8. Установлено, что фрактальная размерность выражается как $D = 2 - H$, где H есть показатель степени пропорциональности дисперсии приращения случайного процесса к разности координат $V(\Delta x) \approx |\Delta x|^{2H}$, другими словами пропорциональности разности дисперсии и ковариации в нуле. В данном разделе показана также зависимость показателей разработки от фрактальной размерности среды.

В четвертом разделе второй главы приведены результаты апробации приложения метода к геостохастическому моделированию геофизических полей. Разработанный в первой главе математический метод моделирования имеет важное прикладное значение и согласован с процессом анализа геофизических данных скважин и воспроизведения пространственного распределения геофизических полей. Форма каротажной кривой содержит важную информацию по целому ряду признаков, позволяющих оценивать строение и мощность изучаемых отложений, переходы их к выше- и нижележащим отложениям, характер контактов и т. д. Форма кривой дает возможность предварительно устанавливать генезис осадка (до проведения детального анализа слагающих ее элементов), определять группу, к которой принадлежит та или иная фация. Аномалии с волнистыми боковыми линиями отражают чередование пород близкого литологического (гранулометрического) состава, обусловленное небольшими колебаниями гидродинамических уровней седиментации. Зубчатые и рассеченные боковые линии аномалий, отражающие чередование прослоев различного литологического (гранулометрического) состава, указывают на непостоянство и резкую смену палеогидродинамических условий седиментации и чаще всего характерны для периферийных (краевых) частей песчаных тел и зон их выклинивания (см., например, ^{7, 8}). Разложение формы в ряд Фурье по полиномам является одним из способов задания формы и ее анализа.

Основные идеи использования разработанного метода математического моделирования нестационарной анизотропной среды в приложении к воспроизведению геофизического поля заключаются в стохастическом построении моментов каротажных кривых (коэффициентов разложения в ряд Фурье по базису многочленов), одним из которых (в наших обозначениях a_0) является среднее. Если на практике известны оценки данных моментов, задача построения геофизического поля упрощается, поскольку мы освобождены

⁶Burrough P.A. Fractal dimentions of landscapes and other environmental data. — Nature, 294 (1981), p. 240-242.

⁷Муромцев В.С. Электрометрическая геология песчаных тел—литологических ловушек нефти и газа.—Л.: Недра, 1984.— 260 с.

⁸Селли Р.Ч. Древние обстановки осадконакопления: Пер. с англ./Пер, А. А. Никонова, К. И. Никоновой.—М.: Недра, 1989,— 294 с.

от их моделирования. На основе данной математической модели и численных алгоритмов была создана программа цифрового геологического моделирования. Результаты апробации на реальных данных Приобского месторождения в 2010 году показали высокую прогнозоспособность и в настоящее время для осуществления контроля за разработкой ряд ключевых месторождений Западной Сибири моделируется с помощью данного метода.

Разработанные математические методы моделирования неоднородных анизотропных сред позволили разработать новые способы освоения трудноизвлекаемых запасов, которые защищены патентами [15], [16].

Глава 3 посвящена разработке качественных и приближенных численно-аналитических методов исследования математических моделей фильтрации в неоднородных анизотропных средах, учитывающие фрактальные, топологические, геометрические особенности строения области фильтрации, разработке математических методов проверки адекватности параметров математической модели геологического строения нефтяного пласта на основе данных натурного эксперимента, а также прогноза основных технологических показателей разработки нефтяных месторождений.

Для моделирования процессов вытеснения нефти водой на практике часто используется изотермическая модель двухфазного течения жидкости в пористой среде, полученная из уравнения сохранения массы и закона Дарси в предположении, что вода и нефть не смешиваются, не обмениваются массами и не меняют фазы, см., например, ⁹, ¹⁰:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(p_o, p_w) S}{B_w(p_w)} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{K(\mathbf{x}) K_{rw}(S)}{\mu_w(p_w) B_w(p_w)} (\nabla p_w - \mathbf{g} \rho_w(p_w)) \right) - q_w, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi(p_o, p_w) (1 - S)}{B_o(p_o)} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{K(\mathbf{x}) K_{ro}(S)}{\mu_o(p_o) B_o(p_o)} (\nabla p_o - \mathbf{g} \rho_o(p_o)) \right) - q_o \\ p_w = p_o + p_{cwo}(S), \end{cases} \quad (11)$$

где индексы o, w соответствуют нефтяной и водной фазам, t — время, \mathbf{x} — пространственная координата. Давления в нефтяной и водной фазах $p_o(t, \mathbf{x})$, $p_w(t, \mathbf{x})$ и текущая водонасыщенность $S(t, \mathbf{x})$ — неизвестные функции. Вектор \mathbf{g} определяется как $\mathbf{g} = g \nabla z$, где g — гравитационная постоянная, а ось z предполагается вертикальной. Функции давлений и водонасыщенности, входящие в систему уравнений (11) и описывающие свойства пористой среды, фильтрующихся жидкостей и их взаимодействие, определяются экспериментально: K — тензор абсолютной проницаемости пористой среды, φ — пористость среды, B_o, B_w — коэффициенты объемного расширения нефти и воды, ρ_o, ρ_w — плотности нефти и воды, μ_o, μ_w — вязкости нефти и

⁹Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. — М.: Недра, 1982.

¹⁰Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. — Гостехиздат, 1953.

воды, K_{ro} , K_{rw} – относительные фазовые проницаемости нефти и воды, p_{cwo} – капиллярное давление. Функции в правой части системы уравнений (11) $q_w(p_w, S, \mathbf{x})$, $q_o(p_o, S, \mathbf{x})$ определяют стоки/источники фаз.

Традиционно в нефтяной инженерии породу принято разделять на коллектор - неколлектор, применяя отсечку, определенную как граничное значение (уровень срезки) петрофизического параметра. Связано это не только с учетом на практике промышленных масштабов добычи нефти из пласта, но и с необходимостью упрощения ресурсоемких вычислений при воспроизведении пласта и движения флюидов в нем. Возникает естественный вопрос корректности такого подхода при моделировании низкопроницаемых и высокорасчлененных коллекторов. Данная задача связывает задачу оценки топологического, фрактального строения среды и ее связи с решениями уравнения фильтрации.

В первом разделе главы 3 исследуется задача описания реализаций случайного поля посредством топологических, геометрических и динамических характеристик для предсказания движения флюида в заданной неоднородной среде. Разработаны методы оценки топологической сложности строения и взаимосвязи чисел Бетти экскурсии неоднородных анизотропных сред.

Задача эффективного вычисления численных характеристик, описывающих топологическое строение сложных трехмерных тел, составляет предмет активно развивающейся в последнее время вычислительной топологии^{11, 12}. В этом случае часто объектом изучения является последовательность вложенных друг в друга топологических подпространств в процессе экскурсии исходного пространства.

Для исследования поведения чисел Бетти b_0 , b_1 , b_2 , характеризующих число связных компонент тела, количество независимых замкнутых (одномерных) циклов и число “пустот” в теле, соответственно, использовался численный алгоритм вычисления топологических характеристик трехмерных тел при помощи исследования дискретных критических точек дискретной линейной функции в трехмерном пространстве, приведенный в работе¹³. Ниже на Рисунке 1 представлены результаты численных исследований взаимосвязи взвешенных по объему чисел Бетти при экскурсии реализаций гауссовых случайных полей с экспоненциальной вариограммой, радиус которой в горизонтальном направлении R_{xy}^e равен 100, 500, 900 и гауссовой вариограммой с радиусом в горизонтальном направлении $R_{xy}^g = 500$, в вертикальном направлении во всех рассмотренных случаях радиус равен 0.1, область представляет собой параллелепипед $5000 \times 5000 \times 20$, размеры элементарной ячейки $50 \times 50 \times 0.2$.

¹¹Edelsbrunner H. Geometry and Topology for Mesh Generation. Cambridge University Press, 2001

¹²Kaczynski T., Mischaikow K., Mrozek M.: Computational Homology // Appl. Math. Sci. Series 157, Springer-Verlag, New York 2004

¹³Базайкин Я.В., Тайманов И.А. Об одном численном алгоритме вычисления топологических характеристик трехмерных тел // ЖВМиМФ, - 2013. -Т.53, №4, - С. 523–530.

По осям абцисс и ординат $\overline{b1} = \frac{\sum_{i=1}^N b1_i V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}$, $\overline{b2} = \frac{\sum_{i=1}^N b2_i V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}$, соответственно, N — количество непресекаемых трехмерных компонент (тел) экскурсии, i — индекс трехмерной компоненты, $b1_i, b2_i$ — числа Бетти i -той компоненты, V_i — объем i -той компоненты. Данный численный эксперимент показывает

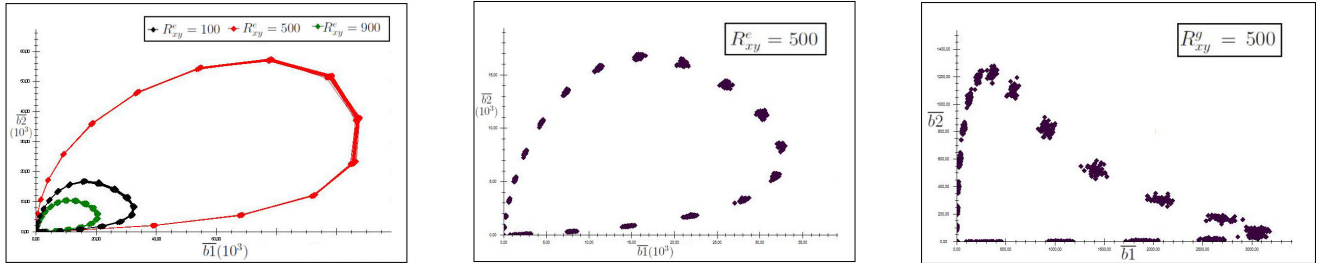


Рисунок 1 – Интегральные топологические характеристики

устойчивость интегральных топологических характеристик (взвешенных по объему чисел Бетти) при стохастическом моделировании, чувствительность к типу и радиусу (рангу) вариограммы. Таким образом, данные характеристики могут служить классификатором при определении аналогов и отнесении цифровых геологических моделей к эквивалентным, как следствие, имеют важное прикладное значение для определения пластов аналогов при геолого-гидродинамическом моделировании слабоизученных месторождений (недостаточно информации для надежного межскважинного распространения фильтрационно-емкостных свойств).

Во втором разделе главы 3 исследуются задачи статистической подземной гидромеханики по усреднению системы дифференциальных уравнений (11), описывающей фильтрацию в неоднородной анизотропной среде, исследуется связь поведения решения уравнения однофазной фильтрации с геометрическими характеристиками среды для ремасштабирования геолого-гидродинамической модели и оценки основных технико-экономических показателей разработки.

Предложена математическая модель схематизации геометрической формы движения флюида в неоднородных анизотропных средах на основе статистического распределения длин линий тока для сведения трехмерной задачи фильтрации жидкостей к двумерному случаю и эффективному использованию аналитического гидродинамического симулятора, основанного на технологии трубок тока, позволяющего, в свою очередь, решить проблему долгих расчетов и задания техногенных трещин гидравлического разрыва пласта.

В третьем разделе главы 3 разработан численно-аналитический метод оценки коэффициента извлечения нефти через оценку взвешенной фрактальной размерности коллектора пласта. Коэффициент извлечения нефти определяется отношением накопленной добычи нефти с начала разработки к величине

начальных геологических запасов. С другой стороны, он может быть вычислен согласно предложенной акад. А.П. Крыловым формуле ¹⁴, как произведение коэффициента вытеснения и коэффициента охвата, который в свою очередь зависит от соотношения мобильностей фаз, схемы расположения скважин, накопленной закачки, а также пространственной геологической неоднородности. На Рисунке 2 представлено поведение коэффициента охвата K_{ox} девятиточечной системы разработки с плотностью 25 га на скважину в зависимости от уровня экскурсии $cutoff$ (поведение топологических характеристик представлено на Рисунке 1) и оценки взвешенной по объему фрактальной размерности коллектора $average_FD$ в предположении фильтрации в пласте цветной жидкости. Данный численный эксперимент показывает возможность и необходимость учета

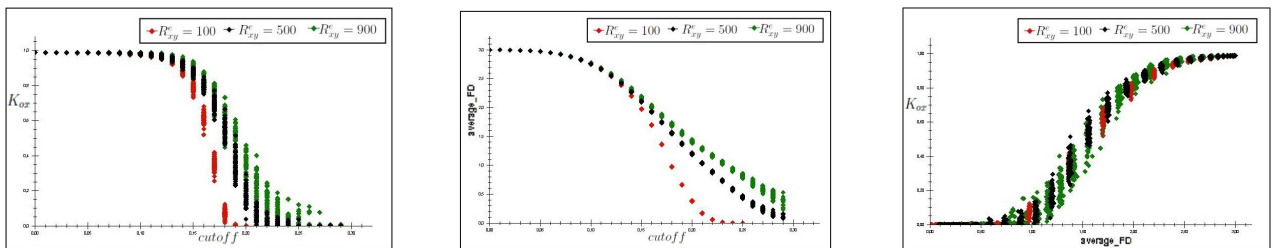


Рисунок 2 – Коэффициент охвата и оценка взвешенной фрактальной размерности

геометрических и топологических характеристик при оценке технологических и экономических показателей разработки месторождений.

В 4 главе рассмотрены вопросы поведения уравнений фильтрации в адиабатическом пределе.

Задача ремасштабирования (апскейлинг) является одной из ключевых задач численного решения уравнения фильтрации. Она сопряжена с задачами усреднения дифференциальных операторов и исследования адиабатических пределов. Под адиабатическими асимптотическими задачами в теории дифференциальных операторов понимаются задачи исследования асимптотического поведения самосопряженного эллиптического дифференциального оператора в частных производных, зависящего от малого параметра, в случае, когда малый параметр входит только в коэффициенты, стоящие перед производными по отношению к выбранной группе переменных. На практике часто малый параметр в уравнениях фильтрации возникает вдоль направления напластования, поскольку высокая расчлененность вдоль напластования означает уменьшение проницаемости в данном направлении в десятки раз.

¹⁴Крылов А.П. Состояние теоретических работ по проектированию разработки нефтяных месторождений и задачи по улучшению этих работ./ Сб. Опыт разработки нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1957, С. 116 - 139.

В данной главе рассматриваются адиабатические пределы в более общей постановке. Пусть M — замкнутое (т.е. компактное без края) гладкое многообразие со слоением \mathcal{F} , снабженное римановой метрикой g . Касательное расслоение TM многообразия M представляется в виде прямой суммы

$$TM = F \oplus H,$$

где $F = T\mathcal{F}$ — касательное расслоение слоения \mathcal{F} и $H = F^\perp$ — ортогональное дополнение к F . Пусть g_F и g_H обозначают ограничения метрики g на F и H соответственно. Тем самым, $g = g_F + g_H$. Определим однопараметрическое семейство римановых метрик на M по формуле

$$g_\varepsilon = g_F + \varepsilon^{-2}g_H, \quad \varepsilon > 0. \quad (12)$$

Расстояния между локальными слоями слоения в любой расслоенной карте в метрике g_ε стремятся к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим оператор Лапласа на дифференциальных формах, определенный метрикой g_ε :

$$\Delta_\varepsilon = d_{g_\varepsilon}^* d + d d_{g_\varepsilon}^*,$$

где $d : C^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{k+1} T^*M)$ — дифференциал де Рама, $d_{g_\varepsilon}^*$ — оператор, сопряженный к оператору d относительно гильбертовой структуры на $C^\infty(M, \Lambda T^*M)$, индуцированной метрикой g_ε . Оператор Δ_ε является самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка с положительно определенным, скалярным главным символом в гильбертовом пространстве $L^2(M, \Lambda T^*M, g_\varepsilon)$. Для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора Δ_ε состоит из собственных значений конечной кратности $0 \leq \lambda_0(\varepsilon) \leq \lambda_1(\varepsilon) \leq \dots, \lambda_j(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$. В диссертации изучаются адиабатические спектральные асимптотики для оператора Δ_ε , то есть асимптотическое поведение его собственных значений при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Такие задачи изучались в случае римановых слоений на компактных многообразиях в работах ¹⁵, ¹⁶, ¹⁷, ¹⁸ и др. Однако методы исследования адиабатических пределов на римановых слоениях не переносятся непосредственно на произвольные слоения на римановых многообразиях. К тому же исследования (в том числе проведенное в данной работе) примеров адиабатических пределов на модельных многообразиях показывают появление

¹⁵Forman R., Spectral sequences and adiabatic limits // *Commun. Math. Phys.* -1995. -**168**. - p. 57 – 116.

¹⁶Kordyukov Yu. A. Adiabatic limits and spectral geometry of foliations // *Math. Ann.* -1999. -**313**. - p. 763–783.

¹⁷Álvarez López J., Kordyukov Yu. A. Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations // *Geom. Funct. Anal.* -2000. -**10**. - p. 977–1027.

¹⁸Liu K., Zhang W. Adiabatic limits and foliations. Topology, geometry, and algebra: interactions and new directions (Stanford, CA, 1999) // *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, - 2001. - **279**. - p.195–208

принципиально новых свойств, полностью отличных от того, что известно в случае римановых слоений.

В первом разделе 4 главы основным объектом исследования является простейший пример римановых слоений, линейное слоение (слоение Кронекера) на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с координатами $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, рассматриваемыми по модулю целочисленных сдвигов, снабженном евклидовой метрикой

$$g = dx^2 + dy^2.$$

Слоями слоения являются образы параллельных прямых $\tilde{L}_{(x_0, y_0)} = \{(x_0 + t, y_0 + t\alpha) : t \in \mathbb{R}\}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ с угловым коэффициентом α при проекции $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$. В случае, когда α рационально, все слои слоения замкнуты и являются окружностями, а само слоение задается слоями расслоения \mathbb{T}^2 над \mathbb{S}^1 . В случае, когда α иррационально, все слои слоения всюду плотны в \mathbb{T}^2 .

Основной результат первой главы состоит в вычислении главного члена асимптотики функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа-Бельтрами Δ_ε , задаваемого метрикой g_ε , при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\Delta_\varepsilon = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} \left(-\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2.$$

Теорема 4.1.1. *Имеет место асимптотическая формула для функции распределения спектра оператора Δ_ε при фиксированном $t \in \mathbb{R}$:*

1. При $\alpha \notin \mathbb{Q}$,

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi} \varepsilon^{-1} t + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. При $\alpha \in \mathbb{Q}$ вида $\alpha = \frac{p}{q}$, где Н.О.Д.(p, q) = 1,

$$N_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \sum_{k: \frac{4\pi^2}{p^2+q^2} k^2 < t} \frac{1}{\pi \sqrt{p^2 + q^2}} \left(t - \frac{4\pi^2}{p^2 + q^2} k^2 \right)^{1/2} + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В данном случае слоение риманово и метрика трансверсально проектируемая.

Заметим, что собственные значения оператора Δ_ε на \mathbb{T}^2 имеют вид

$$\lambda_{kl} = (2\pi)^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha^2} (k + \alpha l)^2 + \frac{\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} (-\alpha k + l)^2 \right), \quad (k, l) \in \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, функция распределения собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами задается формулой

$$N_\varepsilon(t) = \# \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z}^2 : (2\pi)^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha^2} (k + \alpha l)^2 + \frac{\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} (-\alpha k + l)^2 \right) < t \right\}.$$

Мы приходим к следующей эквивалентной принципиально новой асимптотической задаче теории чисел.

Задача 4.1.2. *Найти асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ числа целых точек в эллипсе*

$$\left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : (2\pi)^2 \left(\frac{1}{1 + \alpha^2} (\xi + \alpha\eta)^2 + \frac{\varepsilon^2}{1 + \alpha^2} (-\alpha\xi + \eta)^2 \right) < t \right\}.$$

Несмотря на то, что эта задача формулируется в элементарных терминах, нам неизвестно ее элементарное решение в случае иррационального α . Тем самым использование методов спектральной теории дифференциальных операторов при исследовании данной задачи является существенным.

Во втором разделе главы 4 исследуется поведение спектра оператора Лапласа-Бельтрами в адиабатическом пределе в двух случаях: для одномерного слоения на компактном римановом многообразии Гейзенберга и одномерного слоения на компактном римановом Sol-многообразии.

В разделе 4.2.1 мы рассматриваем адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга.

Вещественной трехмерной группой Гейзенберга H называется подгруппа Ли группы Ли $GL(3, \mathbb{R})$, образованная всеми матрицами вида

$$\gamma(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Соответствующая алгебра Ли \mathfrak{h} — подалгебра Ли алгебры Ли $gl(3, \mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$X(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Римановым многообразием Гейзенберга называется компактное многообразие $\Gamma \backslash H$, снабженное римановой метрикой g , где $\Gamma = \{\gamma(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ — дискретная подгруппа группы Ли H и g — риманова метрика на $\Gamma \backslash H$, чей подъем на H инвариантен при левых сдвигах на элементы группы H (такие метрики мы будем называть локально левоинвариантными).

Нетрудно видеть, что локально левоинвариантная метрика g единственным образом определяется своим значением в единице $\gamma(0, 0, 0)$ группы H , и, тем самым, задается симметрической положительно определенной 3×3 -матрицей.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на H , ассоциированное с

$$X(1, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

Орбиты соответствующего векторного поля на $M = \Gamma \backslash H$ определяют одномерное слоение \mathcal{F} на M . Слои, проходящий через точку $\Gamma\gamma(x, y, z) \in M$, описывается следующим образом:

$$L_{\Gamma\gamma(x,y,z)} = \left\{ \Gamma\gamma\left(x + t, y + \alpha t, z + \alpha t x + \frac{\alpha t^2}{2}\right) \in \Gamma \backslash H : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым многообразием Гейзенберга $(\Gamma \backslash H, g)$, в случае, когда локально левоинвариантная метрика g соответствует единичной матрице, и слоением \mathcal{F} . Оператор Лапласа-Бельтрами Δ_ε на M , соответствующий метрике g_ε , определяемой по формуле (12), на M имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon = -\frac{1}{1 + \alpha^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \left(-\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\tilde{N}_\varepsilon(t)$ преобразование Лапласа функции распределения спектра оператора Δ_ε :

$$\tilde{N}_\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_j(\varepsilon)}.$$

Основным результатом раздела 4.2.1 является следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Для любого $t > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\tilde{N}_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon^{-2}}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{\operatorname{sh}(t\eta)} e^{-t\eta^2} d\eta + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство теоремы 4.2.1 использует некоммутативный гармонический анализ и формулу Мелера для фундаментального решения параболического уравнения, задаваемого оператором Шредингера с однородным магнитным потенциалом. Формула, приведенная в теореме 4.2.1, отличается от формулы, полученной для римановых слоений, дополнительным множителем $\frac{\eta}{\operatorname{sinh}(t\eta)}$, который связан с изменением трансверсальной составляющей метрики под действием потока.

В разделе 4.2.2 мы рассматриваем адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях.

Группа Ли Sol есть разрешимая подгруппа Ли группы Ли $GL(3, \mathbb{R})$, образованная всеми матрицами вида

$$\gamma(u, v, w) = \begin{pmatrix} e^w & 0 & u \\ 0 & e^{-w} & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

Алгебра Ли \mathfrak{sol} группы Ли Sol — подалгебра Ли алгебры Ли $gl(3, \mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$X(u, v, w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & -w & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ и $|\operatorname{tr} A| > 2$. Обозначим через λ и λ^{-1} собственные значения матрицы A и предположим, что $\lambda > 1$. Определим вектора $(c_1^1, c_2^1), (c_1^2, c_2^2)$ уравнением

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Римановым Sol -многообразием называется компактное многообразие $M_A^3 = G_A \backslash Sol$, снабженное римановой метрикой g , где G_A — равномерная дискретная подгруппа группы Ли Sol , состоящая из таких $\gamma(u, v, w) \in Sol$, что

$$(u, v) \in \Gamma := \{k(c_1^1, c_1^2) + l(c_2^1, c_2^2), \quad k, l \in \mathbb{Z}\}, \quad w = m \ln \lambda, \quad m \in \mathbb{Z},$$

и g — риманова метрика на M_A^3 , чей подъем на Sol инвариантен при левых сдвигах на элементы группы Sol (локально левоинвариантная риманова метрика).

Как и в разделе 4.2.1, локально левоинвариантная метрика g единственным образом определяется своим значением в единице $\gamma(0, 0, 0)$ группы Sol , и, тем самым, задается симметрической положительно определенной 3×3 -матрицей.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на Sol , ассоциированное с $X(1, \alpha, 0) \in \mathfrak{sol}$. Орбиты соответствующего векторного поля на M_A^3 определяют одномерное слоение \mathcal{F} . Слои слоения \mathcal{F} , проходящий через точку $G_A \gamma(u, v, w) \in M_A^3$, имеет вид

$$L_{G_A \gamma(u, v, w)} = \{G_A \gamma(u + e^{wt}, v + \alpha e^{-wt}, w) \in M_A^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Предположим, что локально левоинвариантная метрика g соответствует единичной матрице. Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым Sol -многообразием (M_A^3, g) и слоением \mathcal{F} .

Оператор Лапласа-Бельтрами на M_A^3 , соответствующий метрике g_ε , которая задается формулой (12), в координатах (u, v, w) имеет вид

$$\Delta_\varepsilon = -\frac{1 + \varepsilon^2 \alpha^2}{1 + \alpha^2} e^{2w} \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2\alpha(1 - \varepsilon^2)}{1 + \alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2}{1 + \alpha^2} e^{-2w} \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial w^2}.$$

Основным результатом данного раздела 4.2.2 является теорема.

Теорема 4.2.2. Для любого $t > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула для функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа-Бельтрами

1. При $\alpha \neq 0$

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{4\pi^2} t^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. При $\alpha = 0$

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{6\pi^2} t^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При $\alpha \neq 0$ доказательство теоремы 4.2.2 использует вычисление спектра оператора Лапласа на римановом Sol-многообразии, приведенное в работе ¹⁹, которая является продолжением исследований геодезических потоков на римановых Sol-многообразиях ²⁰, ²¹, и квазиклассические спектральные асимптотики ²² для модифицированного оператора Матье

$$H_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + a \operatorname{ch}(2\mu x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При $\alpha = 0$ метрика является трансверсально проектируемой, тем самым применима асимптотическая формула, полученная в работе ²³.

В третьем разделе 4 главы вычислен спектр оператора Лапласа на дифференциальных одной формах на римановых многообразиях Гейзенберга, исследованы «малые» собственные значения оператора Лапласа и установлена их связь с дифференциальной спектральной последовательностью слоения. Приведены результаты приложения адиабатических пределов к теории чисел, исследуется задача о подсчете числа целых точек в семействе анизотропно расширяющихся областей. Также в данном разделе получены более точные оценки остатка, при наложении некоторых ограничений на границу области S и изучаются усредненные оценки остатка $R_\varepsilon(S)$, взятые по образам области S при вращениях на элементы некоторой группы ортогональных преобразований.

В четвертом разделе 4 главы приведен анализ полученных результатов применительно к ремасштабированию геолого-гидродинамических моделей. Отметим, что в случае риманова слоения известна общая формула

¹⁹Bolsinov A.V., Dullin H.R., Veselov A.P. Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy // *Comm. Math. Phys.* - 2006. -**264**. - p. 583–611.

²⁰Bolsinov A.V., Taimanov I.A. Integrable geodesic flows with positive topological entropy // *Invent. Math.* - 2000. -**140**. - p. 639–650.

²¹Болсинов А.В., Тайманов И.А. Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов // *Тр. МИАН* - 2000. -**231**. - С. 42–58.

²²Helffer B., Martinez A., Robert D. Ergodicite et limite semi-classique // *Comm. Math. Phys.* - 1987. -**109**. - p. 313–326.

²³Kordyukov Yu. A., Adiabatic limits and spectral geometry of foliations. *Math. Ann.* **313** (1999), 763–783.

асимптотического поведения функции распределения спектра оператора Лапласа. В рассмотренных в разделах 2 и 3 главы 4 примерах адиабатических пределов римановых слоениях на модельных многообразиях порядок асимптотики равен ε^{-2} , но коэффициенты при ε^{-2} , как и методы их вычисления, различны. Это говорит об отсутствии универсальных методов ремасштабирования и необходимости проверки согласованности расчетов при апскейлинге.

Заключение

Основным результатом диссертационной работы являются разработанные математические методы моделирования неоднородных анизотропных сред в статистической подземной гидромеханике, имеющие важное практическое значение.

При проведении диссертационного исследования получены следующие результаты:

1. Разработаны математические методы стохастического моделирования и статистической непараметрической оценки вероятностных характеристик нестационарных анизотропных случайных полей, учитывающие известные дискретные значения реализации и априорную информацию о геометрическом строении реализаций случайного поля.

2. Разработан программный модуль геостохастического моделирования и геостатистического анализа нестационарных анизотропных случайных полей для построения цифровых геологических моделей, который снижает степень исследовательского субъективизма, обеспечивает высокую прогнозоспособность цифровой геологической модели высокорасчлененных низкопроницаемых пластов нефтегазовых месторождений.

3. Разработаны качественные и численно-аналитические методы исследования математических моделей фильтрации в неоднородных анизотропных средах, учитывающие фрактальные, топологические, геометрические особенности строения области фильтрации.

4. Разработаны математические методы проверки адекватности математической модели геологического строения нефтяного пласта на основе динамических данных натурного эксперимента.

5. Исследовано поведение анизотропного однофазного уравнения фильтрации на конкретных модельных двух- и трехмерных многообразиях в адиабатическом пределе, показано появление принципиально новых асимптотических свойств оператора Лапласа в адиабатическом пределе, полностью отличных от того, что известно в случае римановых слоений.

6. Разработан и реализован в виде программы для цифрового геологического моделирования масштабируемый параллельный алгоритм стохастического моделирования нестационарных анизотропных случайных полей, позволяющий проводить вычисления по построению реализаций случайного поля на современных параллельных вычислительных системах с различной архитектурой, системах с общей памятью (многоядерные ПК), системах с распределенной памятью (кластер), а так же гибридных вычислительных системах (с графическими процессорами).

Междисциплинарный подход к разработке математических методов моделирования неоднородных анизотропных сред и к исследованию поведения решений системы дифференциальных уравнений модели фильтрации в насыщенных пористых средах позволил по новому смотреть на задачи подземной гидромеханики, открыл новые возможности для их решения.

Публикации по теме диссертации

[1] Яковлев, А.А. Спектр оператора Лапласа на дифференциальных формах на римановых многообразиях Гейзенберга / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А. // Вестник УГАТУ. – 2006. – Т.7, №2. – С. 209-212.

[2] Яковлев, А.А. Адиабатические пределы и некоторые задачи теории чисел / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А. // Вестник УГАТУ. – 2007. - Т9, №3. – С.20-23.

[3] Яковлев, А.А. Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга / Яковлев А.А. // Математический сборник. - 2008. - Т. 199, № 2. - С. 149-160.

[4] Яковлев, А.А. Адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях / Яковлев А.А. // Математические заметки. - 2008. - Т. 84, № 2. - С. 318-320.

[5] Яковлев, А.А. Новые подходы в теории геостатистического моделирования / Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. // Вестник УГАТУ. - 2010. - Т. 37, № 2. - С. 209-215.

[6] Яковлев, А.А. Воспроизведение геологической неоднородности в геолого-гидродинамических моделях / Байков В.А., Яковлев А.А. // Научно-технический вестник ОАО «НК-Роснефть». – 2010. - № 2. - С. 13-15.

[7] Яковлев, А.А. Асимптотика спектра оператора Лапласа на римановых Sol-многообразиях в адиабатическом пределе / Яковлев А.А. // Сиб. матем. журн. – 2010. - Т.51, № 2. - С. 457–472.

[8] Яковлев, А.А. Асимптотическое поведение вариограммы в нуле (модель черный шум) / Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. // Уфимск. матем. журн. – 2010. - Т. 2, № 3. - С. 10–16.

[9] Яковлев, А.А. Новые подходы к вопросам геолого-гидродинамического моделирования / Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. // Нефтяное хозяйство. – 2010. - № 9. - С. 56–58

[10] Яковлев, А.А. Учет неоднородности при геолого-гидродинамическом моделировании Приобского месторождения / Байков В. А., Бочков А.С., Яковлев А.А. // Нефтяное хозяйство. – 2011. - № 5. - С. 50-54.

[11] Яковлев, А.А. Целые точки в областях и адиабатические пределы / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А. // Алгебра и анализ. - 2011. – Т.23, №6. - С. 80-95.

[12] Яковлев, А.А. Проблемы разработки от кило- до нанометров / Байков В.А., Газизов Р.К., Латыпов А.Р., Яковлев А.А. // Научно-технический вестник ОАО «НК-Роснефть». – 2011. - № 2. - С. 13-15.

[13] Яковлев, А.А. Задача о числе целых точек в семействах анизотропно расширяющихся областей и ее приложения в спектральной теории / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А. // Матем. Заметки. – 2012. – Т.92, №4. – С. 632-635.

[14] Яковлев, А.А. Численный анализ топологических характеристик трехмерных геологических моделей нефтегазовых месторождений / Базайкин Я.В., Байков В.А., Тайманов И.А., Яковлев А.А. // Математическое моделирование. - 2013. - Т.25, №10. - С.19-31.

Патенты и свидетельства об официальной регистрации программ для ЭВМ

[15] Патент 2451177 РФ. Способ контроля за разботкой пластов / В.А. Байков, Б.А. Бочков, Г.Р. Галеев, Д.С. Мухамадеев, А.А. Тимиргалин, А.А. Яковлев. Заявл. 15.04.2011; опубл. 20.05.2012, Бюл.№14

[16] Патент 2455484 РФ. Способ контроля за разботкой высокорасчлененных пластов / В.А. Байков, А.С. Бочков, Г.Р. Галеев, Д.С. Мухамадеев, А.А. Яковлев. Заявл. 15.04.2011; опубл. 10.07.2012, Бюл.№19

[17] Свид. об офиц. рег. программы для ЭВМ № 2012617077. Спектральное моделирование кривых ГИС./ В.А. Байков, А.С. Бочков, Г.Р. Галеев, И.С. Желтова, Д.С. Мухамадеев, А.А. Тимиргалин, А.А. Яковлев. Зарег. 07.08.2012 г.

[18] Свид. об офиц. рег. программы для ЭВМ № 2013614070. Библиотека параллельных алгоритмов геостатистического моделирования на графических процессорах. / М.В.Андреев, А.Л. Штангеев, А.В. Юлдашев, А.А. Тимиргалин, А.А. Яковлев. Зарег. 23.04.2013 г.

Монография

[19] Яковлев, А.А. Математическая геология. Т.1. Введение в геостатистику: монография / Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. — М.-Ижевск: ИКИ, Библиотека нефтяного инжиниринга, 2012. — 228 с.

Основные публикации в других изданиях

[20] Яковлев А.А. Спектр оператора Лапласа на дифференциальных формах на римановом многообразии Гейзенберга. // IV Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике, посвященная 95-летию БашГУ: Материалы конференции. Уфа, БашГУ, 2004 г. С. 24.

[21] Яковлев А.А. Спектр оператора Лапласа-Бельтрами на двумерном торе в адиабатическом пределе. // Международная Уфимская зимняя школа-конференция по математике и физике для студентов, аспирантов и молодых ученых: Материалы конференции: Уфа, БашГУ, 2005 г. С. 35.

[22] Яковлев А.А. Спектральная геометрия риманова многообразия Гейзенберга и адиабатические пределы. // C^* -алгебры и эллиптическая теория. Материалы конференции: Польша, Бедлево, 2006 г. С. 27.(опубликована на английском языке).

[23] Яковлев А.А. Спектр Sol-многообразий в адиабатическом пределе. // Математика в современном мире, посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН: Материалы конференции. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2007 г. С. 111-112.

[24] Яковлев А.А. Адиабатические пределы для некоторых многообразий со слоением. // Третья Российско-германская конференция посвященная 95-летию со дня рождения А.Д. Александрова: Материалы конференции. С.-Петербург, ПОМИ РАН, 2007 г. С. 44-45.(опубликована на английском языке).

[25] Яковлев А.А. Адиабатические пределы для некоторых многообразий со слоением. // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: Материалы международной конференции, посвященной памяти И.Г. Петровского. Москва, МГУ, 2007 г. С. 339-340.

- [26] Яковлев А.А. Адиабатические пределы для некоторых многообразий со слоением. // Уфимская международная математическая конференция, посвященная памяти А.Ф. Леонтьева: Материалы конференции, Уфа, БГУ, 2007 г., Т. 3. С. 45.
- [27] Яковлев А.А. Спектральная геометрия на некоторых неримановых слоениях и адиабатические пределы. // Операторная алгебра и топология: Материалы международной конференции. Москва, МГУ, 2007 г. С. 39.
- [28] Яковлев, А.А. Адиабатические пределы и спектр оператора лапласа в адиабатическом пределе на многообразиях со слоением / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А. // C^* -алгебры и эллиптическая теория. II. Тренды в математике, Биркхойзер, Базель 2008. С.123-144 (опуб. на англ.)
- [29] Яковлев, А.А. Спектр Sol-многообразий в адиабатическом пределе / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А.// Современные проблемы анализа и геометрии-2009, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН: Материалы конференции. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2009 г. С. 110.
- [30] Яковлев, А.А. Новые методы геостохастического моделирования. / Байков В.А., Яковлев А.А.//Российская конференция “Многофазные системы: природа, человек, общество, технологии”, посвященная 70-летию академика Р.И. Нигматулина, Институт механики УНЦ РАН: Материалы конференции, Уфа, июнь 2010 г., С. 85.
- [31] Яковлев, А.А. Комплексование данных геологии, петрофизики и разработки при моделировании сложнопостроенных коллекторов. / Байков В.А., Бочков А.С., Яковлев А.А.// Геология и разарботка месторождений с трудноизвлекаемыми запасами: Материалы X юбилейной научно практической конференции, Геленджик, ОАО НК Роснефть, Нефтяное хозяйство, сентябрь 2010 г., С.16.
- [32] Яковлев, А.А. Геологическое многофакторное моделирование на примере приобского месторождения / Байков В.А., Емченко О.В., Роцектаев А.П., Яковлев А.А.//Инновационные технологии для топливно-энергетического комплекса России, НЦ РИТ, 2010 г. С. 49-58
- [33] Яковлев, А.А. Геолого-гидродинамическое моделирование. Адаптация моделей. Приобское месторождение / Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А.//Инновационные технологии для топливно-энергетического комплекса России, НЦ РИТ, 2010 г. С. 65-69
- [34] Яковлев, А.А. Опыт портирования геостатистического симулятора на архитектуру GPU средствами технологии PGI Accelerator/ Андреев

М.В., Галеев Э.Р., Штангеев А.Л., Юлдашев А.В., Яковлев А.А. //Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: Материалы X Международной конференции, Пермь, ПГТУ, 2010 г. С. 37-41

[35] Яковлев, А.А. / Использование гибридных вычислительных систем на основе графических процессоров при решении задач геостатистического моделирования / Андреев М.В., Газизов Р.К., Ермолаев Е.А., Юлдашев А.В., Штангеев А.Л., Яковлев А.А.//Параллельные вычислительные технологии: Труды международной научной конференции, Москва, МГУ, ЮУрГУ, 2011, С.675

[36] Яковлев, А.А. Новые подходы геостохастического моделирования месторождений/ Бочков А.С., Мухамадеев Д.С., Яковлев А.А. //Третья международная научно практическая конференция "Интенсификация добычи нефти": Материалы конференции, Томск, ТПУ, 2011 г. С.42-47.

[37] Яковлев, А.А. Новые подходы к вопросам геолого-гидродинамического моделирования /Байков В.А., Бадыков И.Х., Галеев Р.Р., Муллағалиев Т.И., Мухамадеев Д.С., Яковлев А.А.//Четвертая научно практическая конференция “Математическое моделирование и компьютерные технологии в процессах разработки месторождений, добычи и переработки нефти”: Материалы конференции, Уфа, ОАО НК Роснефть, Нефтяное хозяйство, апрель 2011 г. С.9.

[38] Яковлев, А.А. Исследование эффективности гибридных вычислительных систем на основе графических процессоров NVIDIA в задаче построения геостохастических геологических моделей /Андреев М.В., Газизов Р. К., Штангеев А.Л., Юлдашев А.В., Яковлев А.А. //Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах: Материалы XI Всероссийской конференции, Н. Новгород, ННГУ, 2012, С. 15-16.

[39] Яковлев, А.А. Адиабатические пределы и приложения к задачам целых точек / Кордюков Ю.А., Яковлев А.А. // Тренды в математике, Шпрингер, Базель, 2013, С. 25-28. (опуб. на англ.)

Яковлев Андрей Александрович

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД В
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКЕ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано к печати 09.10.2013 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 2,0. Усл. кр.-отг. 2,0. Уч. – изд. л. 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 545.

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный
технический университет»
Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа-центр, ул. К.Маркса, 12