Вышинский Александр Алексеевич

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ О БИФУРКАЦИЯХ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Уфа – 2012

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО "Башкирский государственный университет"

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Юмагулов Марат Гаязович.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Красносельский Александр Маркович** (Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН г. Москва); доктор физико-математических наук, профессор **Хабибуллин Исмагил Талгатович** (Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН г. Уфа).
Ведущая организация:	Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь.

Защита диссертации состоится 2 марта 2012 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ФГБОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет" по адресу: 450025, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. Карла Маркса, д. 12, корп. 2 (конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "___" ____________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор **БУЛГАКОВА Г. Т.**

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Работа посвящена вопросам качественного и численного исследования математических моделей популяционной динамики — широкого класса моделей, возникающих при изучении динамики биологических популяций, экологических систем, моделей конкуренции в экономике и др. Интерес специалистов к исследованию таких моделей связан не только с важными приложениями, но и с несомненным теоретическим значением этих исследований. Существенный вклад в разработку соответствующих моделей и методов их исследования внесли Ю.М. Апонин, А.Д. Базыкин, А.С. Братусь, В. Вольтерра, Г.Ф. Гаузе, А.Н. Колмогоров, А. Лотка, Дж. Марри, Ю. Одум, Г. Остер, В.Н Разжевайкин, Г.Ю. Ризниченко, К.Е. Уатт, И.Л. Хабибуллин, А.И. Хибник, J.-M. Ginoux, T. Moser и др.

Дифференциальные уравнения математических моделей популяционной динамики имеют специфические свойства фазовых портретов; они, как правило, зависят от многих параметров, имеют особенности качественных перестроек и др. Эти обстоятельства затрудняют разработку общих методов исследования таких уравнений. Известные приближенные схемы исследования интересующих режимов функционирования системы и компьютерное моделирование проводятся, как правило, на основе прямого численного расчета, что снижает эффективность предлагаемых методов исследования.

Одной из наиболее интересных и в то же время важной с теоретической и практической точек зрения является задача о локальных бифуркациях в системах, описываемых дифференциальными уравнениями моделей популяционной динамики. Такие бифуркации могут сопровождаться возникновением новых стационарных состояний, периодических колебаний малой амплитуды, инвариантных торов и др. Теория локальных бифуркаций детально разработана для динамических систем, зависящих от одного скалярного параметра и у которых коразмерность бифуркаций равна одному. Исследованию таких систем посвящена обширная литература, здесь предложен ряд эффективных качественных и приближенных методов исследования. Существенный вклад в развитие указанной теории, в разработку общих методов исследования бифуркаций и их приложений к анализу бифуркаций в моделях популяционной динамики внесли А.А. Андронов, В.И. Арнольд, А.Д. Базыкин, Р.И. Богданов, Дж. Гукенхеймер, А.М. Красносельский, М.А. Красносельский, Ю.А. Кузнецов, Н.А. Магницкий, А.М. Молчанов, Ю.М. Свирежев, Дж. Форрестер, Ф. Холмс, Э.Э. Шноль и др.

Дальнейшее качественное и приближенное исследование основных сценариев перестроек (бифуркаций) в дифференциальных уравнениях моделей популяционной динамики представляется актуальной и важной задачей. Здесь особо важны разработки общих методов исследования многопараметрических задач, позволяющих проводить анализ бифуркаций различной коразмерности.

Важное место при изучении бифуркационных явлений занимает компьютерное моделирование. Как правило, чем сложнее бифуркация, тем большее значение принимает необходимость компьютерного моделирования. Более того, при изучении сложных бифуркационных явлений компьютерные вычисления часто выходят на первый план. Аналитические методы исследования задач о бифуркациях, как правило, сталкиваются с трудностями вычислительного характера при анализе конкретных моделей. Поэтому здесь актуальным направлением является разработка численных методов компьютерного моделирования для изучения сложных систем, охватывающих несколько степеней свободы.

Целью исследования является разработка методов исследования основных сценариев локальных бифуркаций в моделях популяционной динамики. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Разработка численно–аналитических методов исследования задач о многопараметрических бифуркациях в моделях популяционной динамики.

2. Получение эффективных достаточных признаков основных сценариев многопараметрических бифуркаций в моделях популяционной динамики.

3. Разработка и обоснование итерационных процедур, позволяющих строить бифуркационные решения, их амплитуды и периоды, а также соответствующие значения параметров.

4. Разработка программ численного исследования задач о многопараметрических бифуркациях в моделях популяционной динамики.

Методы исследования. В работе использованы методы математического моделирования, общие методы качественной теории дифференциальных уравнений, нелинейного анализа, методы теории бифуркаций, методы приближенного решения операторных уравнений, метод функционализации параметра.

Научная новизна определяется проведенными исследованиями, в результате которых разработан математический аппарат для анализа бифуркационных явлений в многопараметрических динамических системах. При этом получены следующие новые научные результаты:

1. Разработан новый операторный метод построения бифурцирующих решений моделей популяционной динамики, зависящих как от одного, так и от многих параметров.

2. Разработаны методы конструирования операторных уравнений, позволяющих проводить эффективные аналитические и численные исследования многопараметрических задач о бифуркации периодических решений моделей популяционной динамики.

3. Предолжены эффективные алгоритмы решения многопараметрических бифуркационных задач в моделях популяционной динамики и разработан соответствующий комплекс программ.

Практическая и теоретическая значимость. В работе предлагается новый операторный метод качественного и численного исследования основных сценариев локальных бифуркаций в моделях популяционной динамики. Полученные теоретические результаты позволяют провести детальный анализ бифуркаций широкого класса моделей популяционной динамики. Результаты доведены до расчетных формул, алгоритмов и программ численного исследования задач о многопараметрических бифуркациях. Разработан программный комплекс, позволяющий производить вычислительный анализ поставленных задач. Предложенные схемы, процедуры и программы апробированы при решении ряда практических задач: задач о бифуркации двукратного равновесия, о бифуркациях Андронова–Хопфа и Неймарка–Саккера в системах типа хищник–жертва с однофакторными и двуфакторными модификациям, задачи о бифуркации автоколебаний в моделях Лоренца, Лэнгфорда и др.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Операторный метод для исследования бифурцирующих решений моделей популяционной динамики, зависящих как от одного, так и от многих параметров.

2. Методы конструирования операторных уравнений в многопараметрических задачах о бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений моделей популяционной динамики.

3. Итерационная процедура численного исследования основных сценариев бифуркаций в многопараметрических системах.

4. Комплекс проблемно-ориентированных программ, позволяющий проводить компьютерное моделирование основных сценариев бифуркаций в моделях популяционной динамики. В качестве приложения получены решения, возникающие при бифуракциях Андронова-Хопфа и Неймарка-Саккера в моделях типа "хищник-жертва"с различными модификациями, в моделях Лоренца, Лэнгфорда и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Третьей Всероссийской научно-практической конференции "Проектирование инженерных и научных приложений в среде MatLab"(г. Санкт-Петербург, факультет ПМ-ПУ СПбГУ, 23-26 октября 2007 г.), на международной научной конференции "Колмогоровские чтения – V. Общие проблемы управления и их приложения. (ОПУ-2011)" (г. Тамбов, 10-14 октября 2011 г.), на научной конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ"(г. Уфа, 13-17 декабря 2010 г.), на научно-практической конференции "Прикладная математика и информационные технологии в науке и образовании"(г. Сибай, СИБашГУ, 23-24 мая 2008 г.), на Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, 24-28 июня 2008 г.), на VI Уфимской международной конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения"(г. Уфа, 3-7 октября 2011 г.), на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений БашГУ (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Султанаев Я.Т.), кафедры математического моделирования БашГУ (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Спивак С.И.), на научных семинарах кафедры прикладной математики и информационных технологий СИБашГУ (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Юмагулов М.Г.)

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[11], при этом статьи [1]-[5] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК. Автор также имеет свидетельство об официальной регистрации программного продукта.

Личный вклад соискателя. Постановка основных задач принадлежит научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ, опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в обосновании предлагаемых алгоритмов, а также им получены основные результаты компьютерного моделирования.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы. Объем диссертации составляет 118 страниц основного машинописного текста, включая: 10 рисунков, список литературы из 106-ти наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и основные задачи исследования, приводится обзор литературных источников, кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** основное внимание уделено изучению систем, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} x_1' = x_1 g_1(x,\mu), \\ x_2' = x_2 g_2(x,\mu), \\ \dots \\ x_N' = x_N g_N(x,\mu), \end{cases} \tag{1}$$

где $x = \big(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_N\big)$, $\mu \in R^k$. Система (1) изучается в первом октанте $K_+ = \{x \in R^N : x_i \geqslant 0\}$. Систему (1) называют *системой популяционной динамики* (или популяционной моделью Колмогорова), если выполнены условия:

- функции $g_i(x,\mu)$ являются гладкими по совокупности переменных $x \in K_+$, $\mu \in R^k$,
- частные производные функций $g_i(x,\mu)$ по x_j (при $i \neq j$) не меняют знак при любых значениях $x \in K_+$.

Систему (1) удобно представлять в виде

$$x' = D(x) g(x,\, \mu), \tag{2}$$

где

$$D(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_N \end{bmatrix}, \qquad g(x,\, \mu) = \begin{bmatrix} g_1(x,\, \mu) \\ g_2(x,\, \mu) \\ \dots \\ g_N(x,\, \mu) \end{bmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения вида (1) возникают при математическом моделировании многих объектов в биологии, экологии, экономике, теории игр и др.; они описывают динамику взаимодействующих систем. Особенно широкое распространение такие уравнения получили в биологии и экологии; в частности, в биологических моделях, описываемых уравнениями вида (1), переменные x_i обычно означают численность какой-либо биологической популяции. К системам популяционной динамики относятся модель Вольтерры–Лотки и её модификации, модели Ферхюльста, Моно, Мак-Артура и др. В экологическом моделировании известны, например, модель Свирежева, модель очистки сточных вод с пороговым эффектом. В экономической теории к моделям популяционной динамики относятся, например, модель Гудвина, динамические модели спроса – предложения и др.

В первой главе показано, что в системе (1) при изменении параметров возможны различные бифуркационные явления, в частности бифуркации двукратного равновесия, бифуркации Андронова–Хопфа, Неймарка–Саккера. Специфика соответствующих бифуркаций в моделях популяционной динамики состоит в том, что система (1) обычно зависит от многих параметров, коразмерность бифуркации часто превышает единицу, а сами бифуркации во многих представляющих интерес моделях происходят вблизи координатных осей или плоскостей.

В первой главе изучаются также топологические характеристики неподвижных точек системы (1), качественные признаки основных сценариев бифуркаций.

Во **второй главе** приводится операторный метод исследования основных сценариев локальных бифуркаций, являющийся основным при изучении локальных бифуркаций в моделях популяционной динамики. Предлагаемый метод основан на переходе от задачи о бифуркации для системы (1) к эквивалентной в естественном смысле задаче о бифуркации малых ненулевых решений операторного уравнения вида

$$x = B(\mu)x + b(x,\mu), \quad x \in R^N, \quad \mu \in R^k, \tag{3}$$

где $B(\mu)$ — линейный оператор, а $b(x,\mu)$ — нелинейный непрерывный оператор, удовлетворяющий соотношению $\|b(x,\mu)\| = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$.

Уравнение (3) при всех μ имеет нулевое решение $x \equiv 0$. В задаче о бифуркации интерес представляют ненулевые решения, возникающие в окрестности нулевого решения.

Пусть $e \in R^N$ – некоторый ненулевой вектор; значение μ_0 назовем *правильной точкой бифуркации* уравнения (3) по направлению вектора e, если существует функция $\delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\mu(\varepsilon) \in S(\mu_0, \varepsilon)$, при котором уравнение (3) имеет ненулевое решение $x(\varepsilon) \in S(\varepsilon e, \delta(\varepsilon))$ (здесь $S(x_0, r)$ — шар радиуса r с центром в точке x_0).

Правильная точка бифуркации соответствует тому, что уравнение (3) имеет семейство бифурцирующих решений $\mu(\varepsilon)$ и $x(\varepsilon)$ так, что $\mu(\varepsilon) \to \mu_0$ и $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Предполагается, что число 1 является собственным значением оператора $B(\mu_0)$ кратности k. При этом собственное значение может быть как полупростым, так и не полупростым. В работе рассмотрены оба случая.

Здесь ограничимся случаем, когда $B_0 = B(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности k, т.е. пусть существует линейно независимая система из собственных векторов e_i: $B_0 e_i = e_i$, $i = \overline{1,k}$. Сопряженный оператор B_0^* также имеет полупростое собственное значение 1 кратности k, которому отвечают собственные векторы e_i^*: $B_0^* e_i^* = e_i^*$, $i = \overline{1,k}$. Векторы e_i и e_j^* можно выбрать из соотношений: $(e_i, e_i^*) = 1$, $(e_i, e_j^*) = 0$ при $i \neq j$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,k}$.

Теорема 1. *Пусть оператор $B(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности k и для некоторого e_{j_0} имеет место соотношение:*

$$\triangle = \det \begin{bmatrix} (B'_{\mu_1} e_{j_0}, e_1^*) & (B'_{\mu_2} e_{j_0}, e_1^*) & \cdots & (B'_{\mu_k} e_{j_0}, e_1^*) \\ (B'_{\mu_1} e_{j_0}, e_2^*) & (B'_{\mu_2} e_{j_0}, e_2^*) & \cdots & (B'_{\mu_k} e_{j_0}, e_2^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (B'_{\mu_1} e_{j_0}, e_k^*) & (B'_{\mu_2} e_{j_0}, e_k^*) & \cdots & (B'_{\mu_k} e_{j_0}, e_k^*) \end{bmatrix} \neq 0. \qquad (4)$$

Здесь $B'_{\mu_i} = B'_{\mu_i}(\mu_0)$, $i = \overline{1,k}$, μ_i – компоненты k-мерного вектора μ. Тогда μ_0 является правильной точкой бифуркации уравнения (3) по направлению вектора e_{j_0}.

Для детального изучения правильной бифуркации уравнения (3) в условиях теоремы 1 во второй главе предлагается следующий метод.

На первом этапе рассматривается функционализированное уравнение

$$x = B[\mu(x, \varepsilon)]x + b[x, \mu(x, \varepsilon)], \qquad (5)$$

где $\mu(x, \varepsilon) = [\mu_1(x, \varepsilon), \mu_2(x, \varepsilon), ..., \mu_k(x, \varepsilon)]$, $\mu_i(x, \varepsilon)$ – непрерывные функционалы, которые предлагается выбрать в виде

$$\mu_{j_0}(x, \varepsilon) = \mu_{j_0}^0 + \frac{1}{\varepsilon}\left[(x, e_{j_0}^*) - \varepsilon\right], \ \mu_i(x) = \mu_i^0 + \frac{1}{\varepsilon}(x, e_i^*), \ i = 1, \ldots, k, \ i \neq j_0.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – вспомогательный малый параметр. Если x^* – решение уравнения (5), то x^* – решение уравнения (3) при $\mu = \mu(x^*, \varepsilon)$.

На втором этапе уравнение (5) изучается методом Ньютона-Канторовича. Для этого (5) представляется в виде

$$F_0(x, \varepsilon) + w(x, \varepsilon) = 0, \tag{6}$$

где $F_0(x, \varepsilon) = x - B[\mu(x, \varepsilon)]x$, $w(x, \varepsilon) = -b[x, \mu(x, \varepsilon)]$.

Положим $x_0 = \varepsilon e_{j_0}$; оператор $F_0(x, \varepsilon)$ дифференцируем по Фреше в окрестности вектора x_0. Из соотношения (4) следует, что существует ограниченный оператор $\Gamma_0 = [F_0'(x_0, \varepsilon)]^{-1} : R^N \to R^N$, при этом оператор Γ_0 не зависит от ε.

Основным утверждением, позволяющим строить бифурцирующие решения уравнения (3) является

Теорема 2. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (6) имеет в шаре $S(x_0, \dfrac{\varepsilon}{4})$ единственное решение $x(\varepsilon)$, которое может быть получено как предел последовательных приближений*

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 F_0(x_n, \varepsilon) - \Gamma_0 w(x_n, \varepsilon), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

при этом $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$, $\mu(x(\varepsilon), \varepsilon) \to \mu_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теоремы 1 и 2 являются базовыми в предлагаемых в главах 3 и 4 операторных методах исследования задач о многопараметрических бифуркациях в моделях популяционной динамики, а также в разработке соответствующих алгоритмов и программ.

В **третьей главе** рассматриваются задачи перехода к операторным уравнениям для различных сценариев бифуркаций в системах популяционной динамики вида (1), указываются пути реализации приведенного во второй главе операторного метода анализа бифуркационных задач.

Укажем в краткой форме схему исследования соответствующих задач. Для исследования задачи о бифуркации двукратного равновесия системы (1) необходимо перейти к операторному уравнению

$$D(x)g(x,\, \mu) = 0. \tag{8}$$

Пусть уравнение (8) имеет решение $x = x^*(\mu)$. Положим

$$A(\mu) = D\big(x^*(\mu)\big)g'\big(x^*(\mu),\, \mu\big) + G\big(x^*(\mu),\, \mu\big), \tag{9}$$

где

$$G(x,\,\mu)=\begin{bmatrix} g_1(x,\,\mu) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_2(x,\,\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_N(x,\,\mu) \end{bmatrix}.$$

Пусть при некотором $\mu=\mu_0$ матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 0. В этом случае в системе (1) возможна бифуркация двукратного равновесия в окрестности неподвижной точки $x^*(\mu)$. Для её исследования необходимо определить кратность собственного значения 1 и соответствующие собственные векторы операторов $B(\mu_0)$ и $B^*(\mu_0)$, где $B(\mu)=A(\mu)+I$.

Далее проверяется выполнение условия (4) для уравнения (8). Если условие (4) выполнено, то для построения бифурцирующих решений можно воспользоваться итерационной процедурой (7).

Аналогичные методы разработаны для исследования задач о бифуркации Андронова–Хопфа и бифуркации Неймарка–Саккера в моделях популяционной динамики. В третьей главе показано также, что предложенные методы могут использоваться (с естественной модификацией) и для исследования более широкого класса динамических систем.

Наряду с задачами о бифуркациях в классических моделях популяционной динамики в третьей главе рассматриваются также задачи о бифуркациях в моделях со слабоосцилирующими параметрами. Во многих представляющих практический интерес динамических системах параметры либо медленно изменяются во времени по закону вида $\mu=\mu_0+\delta t$, либо слабо осцилируют по периодическому закону вида $\mu=\mu_0+\delta\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — это периодическая функция, а $\delta>0$ — малый параметр.

В диссертации для изучения бифуркационных явлений в моделях популяционной динамики со слабоосцилирующими параметрами предлагается следующая постановка. Пусть система (2) имеет неподвижную точку $x=x^*(\mu)$, при этом определенная равенством (9) матрица $A(\mu_0)$ имеет чисто мнимые собственные значения. Пусть параметр μ системы (2) слабо осцилирует по закону

$$\mu=\mu_0+\varphi(\delta,\,t),$$

где $\varphi(\delta,\,t)$ — это θ-периодическая по t функция, а δ — малый параметр (скалярный или векторный), при этом $\varphi(0,\,t)\equiv 0$.

В третьей главе рассмотрены основные сценарии бифуркации, когда матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 0 или собственные значения $\pm i\omega_0$. В частности, если $A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений

$\pm i\omega_0$, то здесь возможны различные сценарии бифуркации, зависящие от соотношения чисел θ и ω_0. Показано, что в случае, когда $\dfrac{\theta\omega_0}{2\pi}$ является рациональным числом вида $\dfrac{p}{q}$, то основным сценарием является возникновение периодических решений с периодом $\dfrac{2\pi}{\omega_0}q$. Коразмерность такой бифуркации равна двум; следовательно параметр δ необходимо выбирать двумерным. Для таких сценариев указаны операторные уравнения, позволяющие провести аналитическое и численное исследование бифуркаций.

В **четвертой главе** приведено описание комплекса программ, разработанных автором, для решения ряда бифуркационных задач.

Комплекс программ составлен для решения следующих задач:

- поиск бифурцирующих решений и соответствующих значений параметров в задаче о бифуркации малых ненулевых решений операторных уравнений вида (5) (программа bifr);
- реализация перехода к эквивалентным операторным уравнениям в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа (программы Bhopf и fhopf);
- реализация перехода к эквивалентным операторным уравнениям в задаче о бифуркации Неймарка-Саккера (программа Bns и fns).

В комплекс программ входят пять программных модулей: bifr, Bhopf, fhopf, Bns и fns, написанных на языке MatLab.

Программа bifr является основной в данном комплексе. Данный модуль включает внутренние функции для вычисления вспомогательных компонент.

Этапы работы основной программы для операторной постановки бифуркационной задачи:

1. Входные данные: μ_0 — бифуркационное значение параметра, ε — амплитуда решений, $B(\mu)$, $b(\mu, x)$, $B'_{\mu_i}(\mu_0)$ — операторы задачи, погрешность приближения.
2. Проверка достаточных условий бифуркации и выбор вспомогательных операторов в зависимости от типа собственного значения.
3. Итерационная процедура поиска решений.
4. Выходные данные: бифурцирующие решения x_ε и значения параметров μ_ε.

В четвертой главе также приведены тексты основных программ.

В работе на основе разработанного программного комплекса проведено численное исследование ряда математических моделей. Приведем в качестве иллюстрации результаты компьютерного моделирования двух задач. Первый пример связан с исследованием модели “хищник – две жертвы” (Ю.М. Апонин), описываемой уравнениями

$$\begin{cases} u_1' = u_1(\alpha_1 - u_1 - 6u_2 - 4v), \\ u_2' = u_2(\alpha_2 - u_2 - u_1 - 10v), \\ v' = -v(1 - 0,25u_1 - 4u_2 + v). \end{cases} \tag{10}$$

Здесь u_1 и u_2 — численность популяций каждой из жертв, v — численность популяции хищников. В данной модели параметры α_1 и α_2 отвечают за экологическую обстановку.

Рассмотрим задачу о бифуркации Андронова–Хопфа в окрестности ненулевой неподвижной точки $x^* = (-11,2+8,2\alpha_1-4,4\alpha_2;\ 1,2-0,7\alpha_1+0,4\alpha_2;\ 1-0,75\alpha_1+0,5\alpha_2)$.

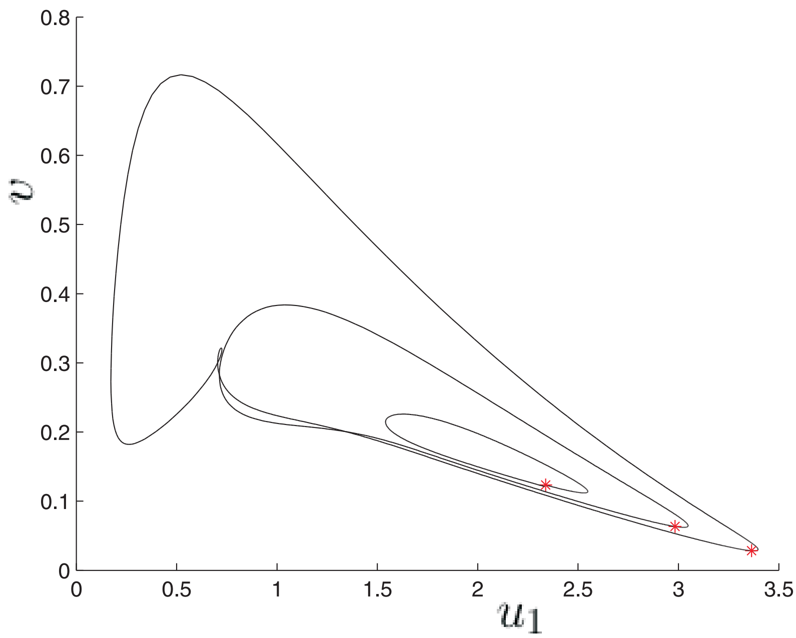

Рисунок 1. Семейство периодических траекторий системы (10).

Пусть $\alpha_1 = 3,7$. Тогда при $\alpha_2^* \approx 3,87$ матрица Якоби правой части системы (10), вычисленная в точке x^*, имеет два чисто мнимых собственных значения. При этом третье собственное значение не равно нулю. Следовательно, при переходе α_2 через значение α_2^* в системе (10) в окрестности точки x^* возникают циклы.

На рисунке 1 изображены фазовые траектории решений $x(t,\varepsilon)$ системы (10) при $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,2$ и $\varepsilon = 0,3$, полученные с помощью разработанных алгоритмов и программ. Символами $*$ обозначены точки $x(0,\varepsilon)$.

Предложенный во второй и третьей главах метод может быть использован для анализа бифуркационных задач более широкого класса динамических систем. В работе предложены примеры таких моделей. В качестве второго примера рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = -\nu x_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1, \\ x_2' = \nu x_1 + x_1x_3 - 2x_2x_3 - \mu(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2, \\ x_3' = 2\mu x_3 - x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1. \end{cases} \tag{11}$$

Эта система при всех значениях параметра имеет периодическое решение $\varphi_0(t) = (\cos\nu t; \sin\nu t; 0)$. При переходе параметра μ через $\mu_0 = 0$ в системе (11) реализуется сценарий бифуркации Неймарка–Саккера в окрестности цикла $\varphi_0(t)$. В частности, здесь возможно возникновение субгармонических колебаний с периодом $T = kT_0$, где $T_0 = \dfrac{2\pi}{\nu}$. На рисунке 2 изображено одно из таких субгармонических колебаний, а именно, с периодом $T = 4T_0$, полученное с помощью разработанных алгоритмов и программ.

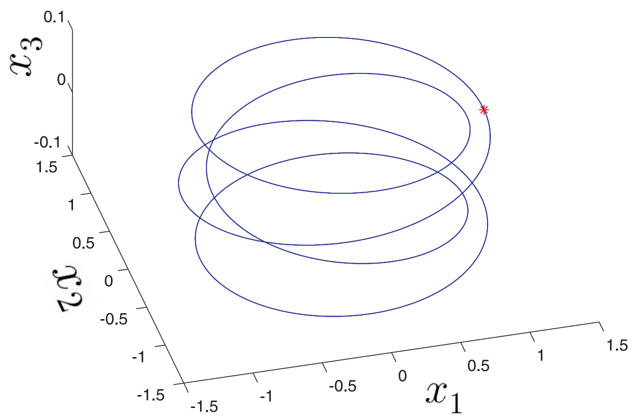

Рисунок 2. Субгармонические колебания системы (11).

В **заключении** анонсируются основные полученные результаты:

1. Разработаны новые операторные методы качественного и численного исследования задач о локальных бифуркациях в моделях популяционной динамики. Особенностью предложенных методов является то, что они позволяют исследовать не только однопараметрические, но и многопараметрические задачи со сложным вырождением.

2. Получены новые достаточные признаки основных сценариев многопараметрических бифуркаций в моделях популяционной динамики. Полученные признаки не требуют исследования топологических и спектральных свойств операторов задачи.

3. Разработаны новые итерационные процедуры численного построения бифуркационных решений, их амплитуд и периодов, соответствующих значений параметров в задачах о многопараметрических бифуркациях динамических систем.

4. Разработан комплекс программ для численного исследования задач о многопараметрических бифуркациях в моделях популяционной динамики.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из списка ВАК

1. Юмагулов, М.Г. Операторный метод исследования локальных бифуркаций многопараметрических динамических систем / М.Г. Юмагулов, **А.А. Вышинский**, С.А. Муртазина, И.Д. Нуров, // Вестник СПбГУ. Серия 10. «Прикладная математика, информатика, процессы управления». – 2009. – Вып. 2. – С. 146-155.

2. **Вышинский, А.А.** Бифуркации периодических колебаний в нелинейных системах управления / А.А. Вышинский // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». – 2009. – Т. 14. Вып. 4. – С. 687-689.

3. **Вышинский, А.А.** Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах / А.А. Вышинский, Л.С. Ибрагимова, С.А. Муртазина, М.Г. Юмагулов // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т.2. №4. – С. 3-26.

4. **Вышинский, А.А.** Приближенное исследование многопараметрических бифуркаций в моделях популяционной динамики / А.А. Вышинский // Уфимский математический журнал. – 2011. – Т.3. №4. – С. 15-19.

5. **Вышинский, А.А.** Операторный подход исследования некоторых задач многопараметрических бифуркаций/ А.А. Вышинский // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». – 2011. – Т. 16. Вып. 4. – С. 1052-1055.

В других изданиях

6. **Вышинский, А.А.** Приближенное исследование бифуркации малых решений операторных уравнений / А.А. Вышинский, С.А. Муртазина // Новые программные средства для предприятий Урала. Выпуск 5.: Сб. науч. тр. – 2006. – С. 100-102.

7. Юмагулов, М.Г. Моделирование периодических колебаний динамических систем со слабоосцилирующими параметрами / М.Г. Юмагулов, **А.А. Вышинский** // Создание и внедрение корпоративных информационных систем (КИС) на промышленных предприятиях Российской Федерации. Вып. 2: Сб. тр. Международной науч.-техн. конф. Под редакцией Д.Х. Девятова. – 2007. – С. 295-297.

8. Юмагулов, М.Г. Моделирование бифуркационных задач многопараметрических динамических систем / М.Г. Юмагулов, **А.А. Вышинский**, И.Д. Нуров // Материалы III Всероссийской научной конференции "Проектирование научных и инженерных приложений в среде MatLab 23-26 октября. URL: http://matlab.exponenta.ru/conf2007/ (дата обращения: 20.11.07) – 2007. – С. 742-748.

9. Юмагулов, М.Г. Моделирование бифурцирующих решений k-параметрических динамических систем / М.Г. Юмагулов, **А.А. Вышинский**, И.Д. Нуров // Доклады АН Респ. Таджикистан. – 2007. – Т. 50. №5. – С. 409-417.

10. **Вышинский, А.А.** Бифуркации циклов нелинейных динамических систем / А.А. Вышинский // Материалы региональной науч.-практ. конференции "Уральский регион РБ: Человек, природа, общество". – 2009. – С. 357-360.

11. **Вышинский, А.А.** Асимптотические формулы в задаче о бифуркациях нелинейных колебаний / А.А. Вышинский, С.А. Муртазина // Материалы Всероссийской школы–конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". – 2007. – С. 20-21.

Патентные документы

12. Свидетельство о регистрации электронного ресурса №17645: <Программный комплекс, реализующий алгоритм численного решения задач о многопараметрических бифуркациях динамических систем> // **А.А. Вышинский.** М.: Роспатент, 2011. – Свидет. о гос. рег. № 50201151532 от 07.12.2011.

Соискатель А. А. Вышинский

ВЫШИНСКИЙ Александр Алексеевич

ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ О БИФУРКАЦИЯХ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 24.12.2009. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр. – отт. 1,0. Уч. изд. л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 628.