**На правах рукописи**

КАРТАК Вадим Михайлович

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ N-МЕРНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ УПАКОВКИ НА БАЗЕ СЕЧЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

**Специальность 05.13.01**
**«Системный анализ, управление и обработка информации (в промышленности)»**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации на соискание учёной степени**
**доктора физико-математических наук**

**Уфа–2011**

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и кибернетики в ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет».

**Научный консультант:** доктор технических наук, профессор
Мухачева Элита Александровна

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук, профессор
**Колоколов Александр Александрович**;
Омский филиал института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН

доктор физико-математических наук, профессор
**Панюков Анатолий Васильевич**;
ГОУ ВПО Южно-Уральский государственный
университет

доктор физико-математических наук, профессор
**Газизов Рафаил Кавыевич**.
ФГБОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет

**Ведущая организация:** Институт математики и механики
Уральского отделения Российской Академии наук

Защита состоится 16 сентября 2011 г. в _____ час. на заседании диссертационного совета № Д-212.288.06 при ФГБОУ ВПО Уфимском государственном авиационном техническом университете по адресу: 450000, г. Уфа, К. Маркса, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уфимского государственного авиационного технического университета.

Автореферат разослан «___»___________2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
профессор, доктор физ.-мат. наук Булгакова Г. Т.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

**Актуальность темы.** Развитие современного промышленного производства невозможно без широкого использования систем, нацеленных на оптимизацию производственных процессов и тем самым, рационального использования ресурсов. В настоящее время разработка новых методов системного анализа, связанных с теорией решения задач дискретной оптимизации, обусловлена бурным развитием компьютерной техники, а также широким кругом прикладных задач, среди которых выделяются задачи оптимизации сложных технологических процессов. Интерес к ним вызван многими актуальными проблемами управления и принятия решений, представляемыми дискретными моделями.

Важнейшим направлением в этой области является исследование задач, связанных с оптимизацией упаковки различных геометрических объектов в заданную область. Эти задачи имеют широкое практическое применение в различных отраслях промышленности (задачи упаковки контейнеров, задачи сохранения информации, проектирование интегральных схем и т.д.). Более того, к ним сводятся ряд других оптимизационных задач, в том числе транспортные задачи, задачи логистики, задачи составления расписания, задачи календарного планирования и т.д.

Фундаментальные научные результаты в решении данных задач принадлежат Л. В. Канторовичу, В. А. Залгаллеру, П. Гилмори и Р. Гомори. Результаты дальнейших исследований отражены в работах В. А. Булавского, М. А. Яковлевой, Ю. Г. Стояна, Э. А. Мухачевой, И. В. Романовского, В. А. Кузнецова, Х. Дукхоффа, С. Мартелло, И. Терно, Г. Шайтхауэра и др.

Основной трудностью при получении оптимального решения задачи раскроя-упаковки является её комбинаторная сложность. Уже в линейном (одномерном) случае она относится к классу NP-трудных задач, поэтому для ее оптимального решения на данный момент необходимо использовать экспоненциальные по сложности методы. При повышении мерности пространства задачи (двух-, трех- и т.д.) возникает дополнительная сложность, связанная с геометрией рассматриваемых объектов.

В настоящее время разработан ряд эффективных приближенных и эвристических методов решения задач упаковки. Среди них выделяются конструктивные методы, методы локального поиска оптимума, генетические алгоритмы и т.д. Эти подходы исследовались в трудах И. П. Норенкова, Ю. А. Кочетова, Э. А. Мухачевой, А. А. Колоколова, А. Ф. Валеевой, А. А. Петунина, М. Дориго, Э. Фолкенауэра и др. Однако наличие этих методов не снимает проблему получения оптимального решения. Даже в тех случаях, когда построенное решение оптимально, доказательство данного факта представляет собой отдельную NP–трудную задачу.

Кроме того, довольно сложно оценить, насколько хорошо тот или другой приближенный алгоритм решает исходную задачу. В настоящее время известно всего несколько точных методов решения задачи ортогональной упаковки. Чаше всего они сводятся к перебору всего множества допустимых решений и нахождению среди них оптимального. Их различия заключаются в способах представления (кодирования) решений и схемах организации перебора. Точный метод решения этой задачи был разработан А. И. Липовецким. Он ввел понятие «зоны»и показал, что поиск оптимального решения сводится к последовательному перебору «зон». В дальнейшем этот подход был развит в работах Г. Шайтхауера, С. Мартелло, Д. Виго и др. С. Фекете и Ж. Шеперс для нахождения допустимой упаковки в замкнутую область предложили метод, основанный на интервальных графах. Он позволяет избежать повторного просмотра симметричных случаев. С. Клаутио в своих трудах исследует растровую модель задачи ортогональной упаковки, которая представляется в виде задачи линейного целочисленного программирования с псевдополиномиальным числом переменных. Для ее решения он использует метод программирования ограничений (constrain programming). Асимптотически точные методы решения задачи одномерной и двумерной упаковки исследовались в трудах Э. Х. Гимади, В. В. Залюбовского и других авторов.

Размерность задач, для которых удается гарантированно получать оптимальные решения, пока невелика (в двухмерном случае не превосходит 20). Одной из причин, по которой точные методы не обладают достаточной эффективностью, является трудоемкость доказательства оптимальности решения. Это связано с тем, что зачастую не удается точно оценить значение оптимального решения. Данную оценку принято называть «нижней границей». Её значение очень важно для сокращения перебора в точных методах, а также для построения качественной оценки приближенных решений. Для задачи одномерной упаковки О. Маркотте показал, что нижняя граница, полученная в результате решения задачи линейной релаксации, достигается на большинстве задач. Это позволило разработать алгоритмы, эффективно находящие оптимальное решения, для задач с большим числом предметов ($>$500). Однако в случаях, когда эта нижняя граница не достигается, становится актуальной проблема ее уточнения. С. Мартелло и П. Тод в своих работах исследуют нижние границы, основанные на геометрических характеристиках рассматриваемых объектов (длина, площадь, объем и т.д.). С. Фекете и Ж. Шеперс предложили другой подход получения нижних границ. Он основан на свойствах консервативного масштабирования и позволяет получать более точные значения нижней границы. Ж. Карлье для построения консервативного масштабирования применил зависимые от данных двойственно-допустимые функции (ЗДДФ). Вместе с тем используемые им ЗДДФ могут доминироваться другими функциями, таким образом получаемая нижняя граница может быть улучшена путем максимизации ЗДДФ.

Предложенные алгоритмы расчета нижних границ имеют полиномиальную сложность, однако разность между полученным значением и оптимальным может быть существенной. В настоящее время число задач ортогональной упаковки, в которых полученное значение нижней границы совпадает с оптимальным решением, невелико.

Таким образом, проблема разработки новых методов оценки и нахождения оптимального решения задач, связанных с ортогональной упаковкой, является актуальной и своевременной.

**Целью работы** является разработка и исследование математических методов системного анализа, нацеленных на решение оптимизационных задач промышленности, связанных с упаковкой ортогональных объектов. Данное исследование включает в себя разработку новых методов декомпозиции, а также построения качественных оценок и нахождения оптимальных решений многомерных задач ортогональной упаковки.

Для достижения выбранной цели в диссертационной работе поставлены следующие задачи:

1. Дать декомпозиционное представление задач многомерной ортогональ-

ной упаковки и найти метод построения оценки значения оптимального решения.

2. Разработать метод нахождения оптимального решения для задачи ортогональной упаковки в полубесконечную полосу.

3. Получить критерий максимизации двойственно-допустимой функции и применить его для построения оценки значения оптимального решения задачи ортогональной упаковки.

4. Разработать методы нахождения оптимального решения задачи одномерной упаковки большой размерности.

5. Провести анализ вычислительной сложности комбинаторных методов решения задачи одномерной упаковки и выделить наиболее трудоемкие с точки зрения вычислений классы задач.

6. Выявить условия плотного размещения многомерных ортогональных многогранников и предложить оптимизационные методы для решения ряда промышленных задач.

7. Создать специализированное программное обеспечение, реализующее предложенные методы и позволяющее решать широкий класс задач ортогональной упаковки в промышленности.

**Методы исследования.** В работе использовались теория и методы системного анализа, исследования операций, линейного и целочисленного программирования, комбинаторной оптимизации.

**Результаты, выносимые на защиту:**

1. Декомпозиция задач многомерной ортогональной упаковки, соответствующая ей линейная релаксация и методы получения оценки значения оптимального решения.

2. Матричный метод нахождения оптимального решения для задачи ортогональной упаковки в полубесконечную полосу.

3. Критерии максимальности зависимых от данных двойственно-допустимых функций и их использование для оценки оптимального значения задачи ортогональной упаковки.

4. Модифицированный метод ветвей и границ для нахождения оптимального решения задачи одномерной упаковки, а также анализ его вычислительной сложности.

5. Метод группировки для нахождения оптимального решения задачи одномерной упаковки большой размерности.

6. Условия плотного размещения и методы оптимизации для решения практических задач, связанных с размещением сложных многомерных ортогональных многогранников.

**Научная новизна** диссертационной работы отражена в следующих теоретически значимых результатах:

1. Обоснован метод декомпозиции оптимизационной задачи многомерной ортогональной упаковки. Построена линейная релаксация множества решений и приведена оценка оптимального значения целевой функции снизу. Найдены условия уточнения данной оценки. Разработан полиномиальный алгоритм получения оценок для произвольной задачи ортогональной упаковки.

2. Доказана корректность матричного представления для задачи упаковки многомерных ортогональных объектов в полубесконечную полосу. Тем самым трудно формализуемый процесс поиска оптимального решения задачи свелся к последовательному построению бинарных матриц специального вида. Приведены новые алгоритмы нахождения оптимального решения.

3. Установлен критерий максимальности двойственно-допустимой функции, зависимой от данных. Показано, что не все известные ранее функции являются максимальными. Предложены полиномиальные алгоритмы преобразования произвольной двойственно-допустимой зависимой от данных функции к максимальному виду, что позволило выявить новые нижние границы для задачи ортогональной упаковки.

4. Теоретически обоснованы численные процедуры построения оптимального решения задачи одномерной упаковки (метод группировки, модифицированный метод ветвей и границ). Выделены наиболее трудные с

точки зрения перебора классы задач. Доказано необходимое условие, при котором задача обладает свойством целочисленного округления.

5. Предоставлено кортежное представление N-мерных ортогональных многогранников. Созданы оптимизационные алгоритмы их плотного размещения для решения ряда практических задач промышленности.

**Практическая ценность работы.** Предложенные в работе методы могут использоваться для эффективного решения прикладных задач, связанных с оптимизацией упаковки ортогональных объектов. Эти задачи имеют широкий спектр практического применения в различных областях промышленности (машиностроение, деревообработка, текстильная и бумажная промышленность и т.д.). Полученные результаты используются в учебном процессе в Уфимском государственном авиационном техническом университете.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на Байкальских школах-семинарах «Методы оптимизации и их приложения» (1995, 2001, 2008 г., Иркутск), семинарах в Институте вычислительной математики Дрезденского технического университета (1996, 2000, 2002, 2006, 2008, 2010 г., Дрезден, Германия), международных конференциях «Дискретный анализ и исследование операций» (1998, 2000, 2010 г., Новосибирск), международной конференции «Математическое программирование и приложения» (1999, 2001, 2007, 2011 г., Екатеринбург), международной конференции «Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде» (2000 г., Екатеринбург), международной конференции Informs (2000 г., Сан-Антонио, США ), семинаре, посвященном 90-летию со дня рождения С.Н.Черникова, «Алгебра и линейная оптимизация» (2002 г., Екатеринбург), международной конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (2003, 2006, 2009 г., Омск), международной конференции 1-ESICUP (2004 г., Виттенберг, Германия), Крымской осенней математической школе (2005 г., Севастополь, Украина), международной конференции 3-ESICUP (2006 г., Порто, Португалия), международной конференции CSIT (2009 г., Крит, Греция), семинарах кафедры вычислительной математики и кибернетики и кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета, семинарах кафедры вычислительной математики и кафедры математического моделирования Башкирского государственного университета, семинарах отдела вычислительной математики Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, семинаре «Математические модели принятия решений» Института математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, семинаре Отдела математического программирования Института математики и механики Уральского отделения РАН.

**Публикации.** Основные результаты диссертации получены лично автором и опубликованы в 50 научных статьях. В их число входят 1 монография (в соавторстве), 10 статей из перечня ВАК российских рецензируемых научных журналов, 2 статьи в зарубежных рецензируемых журналах.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав основного содержания, заключения, приложений и списка литературы. Объем работы – 237 страницы, библиография – 121 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** дан обзор известных оптимизационных методов решения различных классов задач ортогональной упаковки, обоснована актуальность выбранного направления исследования, представлена классификация различных постановок задач упаковки, встречающихся в промышленности.

**В первой главе** рассмотрена задача многомерной ортогональной упаковки в контейнер. Предложен метод декомпозиции, позволяющий получить линейную релаксацию этой задачи. Получены условия, при которых она не имеет решения. В заключительном разделе рассмотрены двойственно-допустимые функции, зависимые от данных.

В первом разделе главы представлены общие методы построения оценок оптимального значения для задач дискретной оптимизации, которые представляются в виде линейных целочисленных моделей. Детально рассмотрены методы, основанные на непрерывной релаксации. В конце раздела приведено общее описание метода построения граничной точки.

Во втором разделе рассмотрена классическая задача $N$-мерной ортогональной упаковки в замкнутую область (контейнер), которая состоит в следующем. Дано множество предметов, состоящих из $m$ штук N-мерных ортогональных параллелепипедов $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_j\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, заданных своими размерами $\mathbf{R}_j = (r_1^j, \ldots, r_N^j) \in \mathbb{R}_+^N$ и контейнер $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \ldots, \widetilde{S}_N) \in \mathbb{R}_+^N$, являющийся также $N$-мерным ортогональным параллелепипедом. Требуется выяснить, можно ли все предметы из $\mathbf{R}$ упаковать в $\widetilde{S}$ без перекрытия? Поворот предметов запрещен.

Положение параллелепипедов $\mathbf{R}$ в $\widetilde{S}$ задается набором $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_m\}$ их «левых нижних» координат, которые являются векторами $\mathbf{P}_j = (p_1^j, \ldots, p_N^j)$, $j \in J$. Допустимость векторов $\mathbf{P}_j$ определяется неравенствами

$$p_k^j \geq 0, \quad p_k^j + r_k^j \leq \widetilde{S}_k, \quad j \in J, \quad k \in I = \{1, \ldots N\}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \text{для любых} \quad j_1, j_2 \in J, \quad j_1 \neq j_2, \quad \text{найдется } k \in I, \quad \text{для которого} \\ p_k^{j_1} + r_k^{j_1} \leq p_k^{j_2} \quad \text{или} \quad p_k^{j_2} + r_k^{j_2} \leq p_k^{j_1}. \end{gathered} \tag{2}$$

Поставленная задача сводится к проверке совместности системы (1)-(2). Она является ключевой при решении многих оптимизационных проблем, связанных с ортогональной упаковкой. При этом особое внимание уделяется условиям, при которых данная задача не имеет решения.

Путем замещения условий типа «или» в неравенствах (2) на дополнительные бинарные переменные эта модель сводится к линейному целочисленному виду. Ее численно исследовал М. Падберг. Он показал, что она обладает слабыми релаксационными свойствами и не может быть использована для решения задач с числом параллелепипедов $m > 10$.

В диссертационной работе предложена релаксация этой задачи, которая основана на свойствах ортогональных сечений. Введем множество $I_N$, элементами которого являются всевозможные подмножества $I$, кроме пустого множества и самого $I$, т.е. $I_N = \{\{1\}, \ldots, \{2, \ldots, N\}\}$. Множество $I_N$ содержит все возможные наборы координатных направлений, параллельно которым располагаются секущие плоскости.

Выберем подмножество $G \in I_N$ и определим подпространство $\lambda^G = \langle e_{g_1}, e_{g_2}, \ldots, e_{g_t} \rangle$, являющееся линейной оболочкой базисных векторов с номерами из $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$, и дополнительное к нему подпространство $\lambda^{\overline{G}}$. Очевидно, что $\lambda^G \oplus \lambda^{\overline{G}} = \mathbb{R}^N$. Рассмотрим семейство $t-$мерных плоскостей, параллельных подпространству $\lambda^G$. Положение каждой плоскости однозначно определяется выбором точки $h$ с соответствующим радиус-вектором

$\mathbf{h} \in \lambda^{\overline{G}}$. Обозначим плоскость данного семейства как $\lambda_h^G = \mathbf{h} + \lambda^G$.

Предположим, что система (1)-(2) совместная, а $\mathbf{P}$ – допустимое решение. Тогда любой плоскости $\lambda_h^G$, пересекающей контейнер $\widetilde{S}$, сопоставим $m$-мерный бинарный вектор по следующему правилу: $a^G(h, \mathbf{P}) = (a_1, \dots, a_m)^\top$, где

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_h^G \text{ пересекает } i\text{-ый параллелепипед,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

Вектор $a^G(h, \mathbf{P})$ назовем *определяющим вектором.*

Пусть $A^G = (a_1^G, \dots, a_{M_G}^G)$ матрица, столбцами которой являются всевозможные различные определяющие вектора $a^G(h, \mathbf{P})$, и $M_G$ – их число. Для каждого набора $G \in I_N$ построим релаксационное множество

$$Y^G := \left\{ y^G \ : \ \sum_{j=1}^{M_G} y_j^G \leq \prod_{g \in \bar{G}} \tilde{S}_g, \ A^G y^G = b^{G^\top}, \quad y^G \in \mathbb{R}_+^{M_G} \right\}, \tag{4}$$

где $b^g \in \mathbb{R}^m$ с элементами $b_j^G = \prod_{g \in \overline{G}} r_g^j$, $j \in J$. Множества $Y^G$ являются декомпозицией исходной задачи по различным наборам координатных направлений.

**Теорема 1.** *Если существует подмножество $G \in I_N$, для которого $Y^G = \varnothing$, то система (1)–(2) несовместна.*

Теорема 1 может служит основой для создания оценок значений целевых функций различных задач ортогональной упаковки. В силу большого числа векторов $a^G$ проверка условия $Y^G = \varnothing$ осуществляется с помощью симплекс-метода с генерацией столбцов. Точность получаемого ответа зависит от способа генерации векторов $a^G$. В диссертационной работе рассмотрено несколько различных способов построения определяющих векторов $a^G$, которые зависят от мощности $G$. При $|G| = 1$ решается задача о загрузке 0-1 рюкзака. Для случая $|G| > 1$ предложена рекурсивная схема построения $a^G$, а также метод, основанный на непрерывной релаксации модели Бейзли.

Рассмотрим условие неперекрытия параллелепипедов. Очевидно, что если у двух параллелепипедов проекции на все координатные оси с номерами $1, \dots, N$ перекрываются, то эти два параллелепипеда будут перекрываться в пространстве.

Возьмем пару параллелепипедов из $\mathbf{R}$ с номерами $p$ и $q$ и обозначим через $i^G(p,q) := \left\{i \ : \ a^G_{ip} = a^G_{iq} = 1,\ a^G_i \in A^G\right\}$ множество номеров определяющих векторов, для которых $a^G_{ip} = a^G_{iq} = 1$.

Для выяснения перекрытия параллелепипедов с номерами $p$ и $q$ по различным координатным направлениям определим вспомогательные множества

$$Y^G_{(p,q)} := \left\{y^G \ : \ y^G \in Y^G,\, y^G_i = 0,\, i \in i^G(p,q)\right\}. \qquad (5)$$

Связь между множествами $Y^G_{(p,q)}$ и возможным геометрическим расположением параллелепипедов в $\widetilde{S}$ устанавливает следующая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть $p$, $q$ и $G$ таковы, что $Y^G_{(p,q)} = \varnothing$. Тогда для любого допустимого размещения параллелепипедов $\mathbf{R}$ в контейнер $\widetilde{S}$ существует точка $\mathbf{h} \in \lambda^{\overline{G}}$, для которой плоскость $\lambda^G_h$ пересекает $p$-й и $q$-й параллелепипед.*

Из леммы 1 следует, что проекции $p$ и $q$ параллелепипедов на подпространство $\lambda^{\overline{G}}$ пересекаются, то есть пересекаются их проекции на все координатные оси с номерами из $\overline{G}$.

**Теорема 2.** *Если существуют номера $p$ и $q$ и набор $E = \left\{G_{\sigma_1}, G_{\sigma_2}, \ldots, G_{\sigma_t}\right\}$, для которых выполняется $\bigcup_{\sigma \in E} \overline{G_\sigma} = I$ и $Y^G_{(p,q)} = \varnothing$ для всех $G \in E$, то параллелепипеды $\mathbf{R}$ нельзя разместить в области $\widetilde{S}$.*

Теорема 2 устанавливает связь между различными элементами декомпозиции $Y^G$. В диссертационной работе предложен псевдополиномиальный алгоритм проверки выполнения условий теоремы 2.

Множества $Y^G_{(p,q)}$ также использованы для нахождения устойчивых сочетаний и сокращения числа неравенств в системе (1)–(2). Для этой цели строятся два множества

$$\varepsilon^+_i = \left\{(p,q) : \ \exists G,\ i \ \in \ G, \quad Y^G_{(p,q)} = \varnothing\right\}, \qquad (6)$$

$$\varepsilon^-_i = \left\{(p,q) : \quad (p,q) \in \varepsilon^+_j, \quad \forall j \ \in \ I/i\right\}. \qquad (7)$$

Множества $\varepsilon^+_i$ и $\varepsilon^-_i$ содержат пары параллелепипедов, проекции которых на $i$-е координатное направление обязаны пересекаться (или не пересекаться) для любого допустимого решения. Использование этих множеств позволяет сокращать пространство допустимых решений. В диссертации даны рекомендации по их использованию в различных эвристических и точных алгоритмах, решающих задачу ортогональной упаковки.

Третий раздел посвящен консервативному масштабированию задачи ортогональной упаковки.

Понятие *консервативного масштабирования (Conservative Scales (CS))* было сформулировано С. Фекете в 1997 г. Он определил его как модификацию размеров параллелепипедов, для которой из разрешимости исходной задачи следует разрешимость задачи с модифицированными размерами.

Ж.Карлье для построения $CS$ предложил использовать *зависимые от данных двойственно-допустимые функции (ЗДДФ)* .

Пусть даны константы $C, C' > 0$ и $0 \le c_i \le C$, $\forall i \in V$. Функция $f : \{c_1, \ldots, c_m, C\} \to [0, C']$ называется ЗДДФ, если для любого $V_1 \subseteq V$, из условия $\sum_{i\in V_1} c_i \le C$ следует $\sum_{i\in V_1} f(c_i) \le f(C) = C'$.

Он показал, что при существовании набора ЗДДФ $f_k$, $k = \overline{1, N}$ с условием $\sum_{i\in V}\prod_k f_k(r_i^k) > \prod_k f_k(\widetilde{S}_k)$ задача $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$ имеет отрицательный ответ.

В работе введено понятие *максимальной ЗДДФ*. Функция $f$ называется максимальной ЗДДФ, если не существует другой функции $\tilde{f}$, для которой

$$\frac{f(c_i)}{f(C)} \le \frac{\tilde{f}(c_i)}{\tilde{f}(C)},\ \text{и при этом существует } i^* \in V \text{ с условием } \frac{f(c_{i^*})}{f(C)} < \frac{\tilde{f}(c_{i^*})}{\tilde{f}(C)}.$$

Обозначим через $KP(C, \alpha, \beta)$ классическую задачу загрузки 0-1 рюкзака.

$$KP(C, \alpha, \beta) = \max_{x\in\{0,1\}^m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i \ :\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot x_i \le C \right\},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}_+^m$ – веса предметов и $\beta \in \mathbb{R}_+^m$ – их стоимость, а $C$ - размер рюкзака.

**Теорема 3.** *Пусть* $\alpha = (c_1,\ \ldots\ , c_m)$ *и* $\beta = (f(c_1),\ \ldots\ , f(c_m))$. *Функция* $f$ *максимальна тогда и только тогда, когда*

$$f(C) = KP(C, \alpha, \beta), \tag{8}$$

$$f(c_i) = KP(C, \alpha, \beta) - KP\left(C - c_i, \alpha \setminus c_i, \beta \setminus f(c_i)\right),\ \forall i \in V. \tag{9}$$

Показано, что многие из ранее известных ЗДДФ не обладают свойствами максимальности. В работе представлены алгоритмы различной сложности (квадратичной и кубической) для максимизации произвольной ЗДДФ. Вычислительный эксперимент показал, что эффективность применения ЗДДФ после максимизации повысилась на 50 % .

В заключительном разделе главы приведены результаты численного эксперимента, даны рекомендации по использованию описанных выше методов.

**Вторая глава** диссертации посвящена задаче упаковки $N$-мерных ортогональных параллелепипедов в полубесконечную полосу. На базе метода декомпозиции получено матричное представление задачи. Используя свойства матричного представления предложен способ построения оценки снизу значения целевой функции, приведены способы ее улучшения. Рассматриваемая в этой главе задача отличается от задачи предыдущей главы тем, что область, в которую происходит упаковка, является неограниченной по одному направлению.

*Полубесконечной полосой* $S$*,* заданной своими размерами $(S_1, S_2, \ldots, S_{N-1}) \in \mathbb{R}_+^{N-1}$, называется множество точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ таких, что $0 \le x_k \le S_k$, $k = 1, \ldots, N-1$ и $0 \le x_N$.

Пусть для некоторого натурального числа $N \ge 2$ и полубесконечной полосы $S$ с размерами $(S_1, S_2, \ldots, S_{N-1}) \in \mathbb{R}_+^{N-1}$ известен набор из $m$ параллелепипедов $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_j\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$. Каждый из них задан своими размерами $\mathbf{R}_j = (r_j^1, \ldots, r_j^N) \in \mathbb{R}_+^N$. Считаем, что $0 < r_k^j \le S_k, j \in J$, $k = 1, \ldots, N - 1$.

Требуется упаковать $\mathbf{R}$ в $S$ так, чтобы длина занятой части $S$ по $N$-му координатному направлению была минимальной. Поворот запрещен.

Упаковка параллелепипедов $\mathbf{R}$ в $S$ задается набором координат $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_j\}$, где $\mathbf{P}_j = (p_j^1, \ldots, p_j^N)$, $j \in J$, удовлетворяющих условиям

$$p_k^j \ge 0, \quad p_k^j + r_k^j \le S_k, \quad j \in J,\ k = \{1, \ldots, N-1\}. \tag{10}$$

$$\text{Для любых} \quad j_1, j_2 \in J, \quad j_1 \ne j_2, \quad \text{найдется } k \in I, \quad \text{для которого} \\ p_k^{j_1} + r_k^{j_1} \le p_k^{j_2} \quad \text{или} \quad p_k^{j_2} + r_k^{j_2} \le p_k^{j_1}. \tag{11}$$

Определим $\Re = \{\mathbf{P}\}$ как множество всех $\mathbf{P}$, отвечающих условиям (10)-(11). Обозначим

$$\theta(\mathbf{P}) = \max_{j=\overline{1,m}}(p_N^j + r_N^j).$$

Требуется найти такой $\mathbf{P} \in \Re$, для которого

$$\Theta(\mathbf{R}, S) = \min_{\mathbf{P}\in\Re} \theta(\mathbf{P}). \tag{12}$$

Набор $\mathbf{P}^* \in \Re$ назовем *оптимальным*, если $\theta(\mathbf{P}^*) = \Theta(\mathbf{R}, S)$. В работе предложена процедура факторизации множества $\Re$, которая базируется на идее плотного размещения параллелепипедов. Набор $\mathbf{P} \in \Re$ называется *плотным*, если выполняются следующее условия

$$\forall\, j \in J,\ k \in I\ :\ \left(p_k^j = 0\right) \vee \left(\exists\, 1 \le t \le m,\ t \ne i:\ p_k^j = p_k^t + r_k^t\right) \tag{13}$$

Геометрический смысл плотности состоит в том, что любое размещение $\mathbf{R}$ в $S$ можно преобразовать к виду, при котором передние грани любого параллелепипеда располагаются на одном уровне с передней границей области или с задней гранью другого параллелепипеда. Доказано, что любой $\mathbf{P} \in \Re$ может быть преобразован к плотному виду. При этом $\theta(\mathbf{P})$ не увеличивается. В дальнейшем рассматриваются только плотные $\mathbf{P}$, число которых конечно.

Для поиска оптимального решения в диссертации предложено матричное представление решения системы (10)–(11). Для достижения этой цели используется метод декомпозиции, описанный в главе 1.

Пусть для задачи $\langle \mathbf{R}, S\rangle$ известно некоторое допустимое решение $\mathbf{P}$. Для каждого $k \in I$ рассмотрим множество координатных направлений, задающих гиперплоскости $G^k = I_N \setminus k$ и дополнение к нему $\overline{G^k} = k$. Выберем $m+1$ точку на $k-$той координатной оси следующим образом: $h_0 = 0$, $h_i^k = \min(p_k^j + r_k^j\ :\ p_k^j + r_k^j > h_{i-1}, j \in J)$, $i = \overline{1, m}$. Проведем гиперплоскости $\lambda_{h_i^k}^{G^k}$ и сконструируем матрицу $A^k \in \{0, 1\}^{m\times m}$ с определяющими векторами $a^{G^k}(\mathbf{P}, h_i^k)$ в качестве столбцов.

Построенная матрица $A^k$ кодирует положение каждого параллелепипеда по $k$-му координатному направлению в виде непрерывной последовательности единиц в строках. Обозначим $Z^k = (z_1^k,\ \dots\ ,\ z_m^k)$, где $z_i^k = |h_i^k - h_{i-1}^k|$.

Полученные $A^k$ называются *матрицами упаковки*, а векторы $Z^k$ – *векторами упаковки*.

Пример для $N = 2$ изображен на рис. 1.

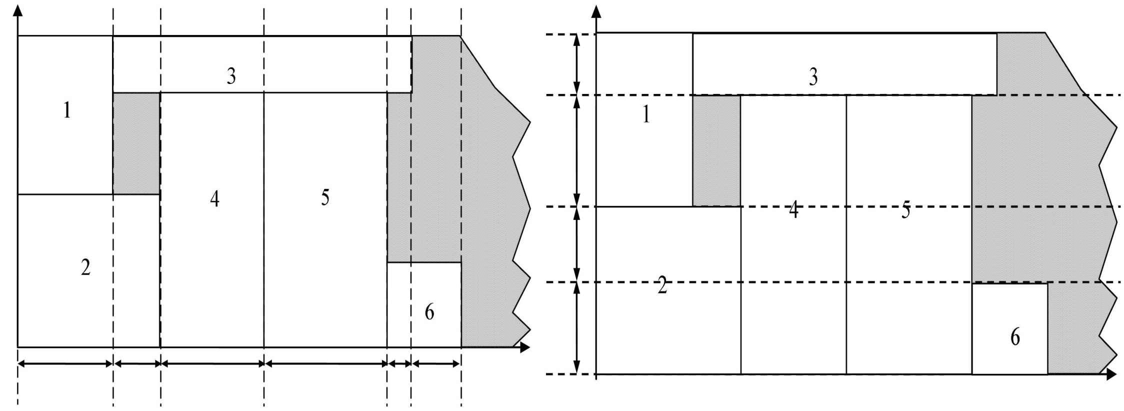


Рис. 1: Пример расположения гиперплоскостей для $N = 2$.

Получаемые при этом матрицы упаковки имеют вид

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из способа построения матрицы $A^k$ и вектора $Z^k$ следует, что они отвечают следующим условиям.

**Условие 1.** ***Продолженность единиц.*** *Для каждой строки $j \in J$ матрицы $A^k$, $k = \overline{1, N}$ найдутся столбцы $i_b^j$ и $i_e^j$, для которых*

$$a_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i_b^j \leqslant i \leqslant i_e^j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{14}$$

**Условие 2.** ***Завершенность.*** *В каждом столбце матриц $A^k$, $k = \overline{1, N}$ заканчивается, по крайней мере, одна из последовательностей единиц*

$$\forall j \in J, \ \exists i_0 \in J, \quad a_{i_0 j}^k = 1 \ \textit{и} \ a_{ij}^k = 0 \ \textit{для} \ i = \overline{(i_0 + 1), m}.$$

**Условие 3.** *Связь между элементами векторов $Z^k$ и матриц $A^k$, $k=\overline{1,N}$ с размерами параллелепипедов* $\mathbf{R}$ *устанавливается соотношением*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^k z_i^k = r_k^j, \quad i=\overline{1,m}. \tag{15}$$

**Условие 4.** ***Неперекрытие параллелепипедов.*** *Для любой пары параллелепипедов $1 \le p \le q \le m$ существует координатное направление $k^* \in I$ такое, что*

$$a_{ip}^{k^*} + a_{iq}^{k^*} < 2, \quad i=\overline{1,m}. \tag{16}$$

Условия 1 – 3 задают размещение параллелепипедов по каждому координатному направлению отдельно, а условие 4 устанавливает связь между всеми компонентами матричного представления. Условие 3 указывает на однозначность получения вектора $Z^k$ из матрицы $A^k$. В работе установлено взаимооднозначное соответствие между $\mathbf{P} \in \Re$ и полученным матричным представлением.

**Теорема 4.** *Пусть для задачи $\langle \mathbf{R}, S\rangle$ известен набор $\mathbf{P} \in \Re$. Тогда ему однозначно сопоставляются матрицы $A^k$ и вектора $Z^k$, $k=\overline{1,N}$, удовлетворяющие условиям 1–4. Обратное, если заданы матрицы $A^k$ и вектора $Z^k$, $k=\overline{1,N}$, удовлетворяющие условиям 1–4, то им однозначно сопоставляется $\mathbf{P}$, для которого*

$$\theta(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{m} Z_i^N.$$

Из теоремы 4 следует, что задача нахождения оптимального $\mathbf{P}$ эквивалентна нахождению $A^k$ и $Z^k$, $k=\overline{1,N}$ , с которыми значение $\sum_{i=1}^{m} Z_i^N$ достигает минимума.

Во втором разделе главы рассмотрена задача нахождения нижней границы для задачи упаковки N-мерных ортогональных параллелепипедов в полубесконечную полосу.

Нижней границей задачи $\langle \mathbf{R},\ S\rangle$ называется функция, зависящая от входных параметров задачи $L_b(\mathbf{R},\ S) \ge 0$, такая, что $L_b(\mathbf{R},\ S) \le \Theta(\mathbf{R}, S)$.

Величина $L_b(\mathbf{R},\ S)$ играет большую роль при доказательстве оптимальности заданного набора координат $\mathbf{P}$. Так если $L_b(\mathbf{R},\ S) = \theta(\mathbf{P})$, то $\mathbf{P}$ – оптимум. В этом случае можно доказать оптимальность решения без полного перебора. В работе предлагаются следующие способы вычисления $L_b(\mathbf{R},\ S)$.

Сопоставим каждому множеству направлений $G^k$ следующую задачу линейного программирования

$$C^k(\mathbf{R}, S) = \sum_{i=1}^{M_{G_k}} y_i^k \ \to \ \min_{y^k}, \quad A^{G^k} y^k = b^{G^k}, y^k \ \in \mathbb{R}_+^{M_{G_k}}, \tag{17}$$

где $A^{G^k}$ – матрица всех возможных определяющих векторов для множества направлений $G^k$.

**Лемма 2.** *Пусть для $\langle \mathbf{R},\ S \rangle$ известна некоторая матрица $A^k$, $k \in I$, отвечающая условиям 1 – 3. Тогда определяющие вектора из $A^k$ образуют допустимое базисное решение в соответствующей задаче линейного программирования (17).*

Из теоремы 4 и леммы 2 следует $\Theta(\mathbf{R}, \mathbf{S}) \geq C^N(\mathbf{R}, S)$.

Значение $L_b^{lp}(\mathbf{R},\ S) = C^N(\mathbf{R}, S)$ называется *lp-нижней границей.* Следующая теорема определяет условия, при которых значение нижней границы может быть улучшено.

**Теорема 5.** *Пусть дана некоторая задача $\langle \mathbf{R}, S \rangle$. Для выполнения условия $\Theta(\mathbf{R}, S) \leq L_b(\mathbf{R},\ S)$ необходимо, чтобы*

- $C^k(\mathbf{R}, S) \leq S_k$, $k = \overline{1,\ N-1}$ *и* $C^N(\mathbf{R}, S) \leq L_b(\mathbf{R},\ S)$*;*
- *существовал набор базисных решений задачи (17), удовлетворяющих условию 4.*

Значение нижней границы можно увеличивать до тех пор, пока условия теоремы 5 не будут выполнены. Первое условие проверяется решением соответствующих задач линейного программирования (17). Для проверки второго условия в диссертации предложен метод, основанных на анализе свойств базисных решений этих задач.

Возможно дальнейшее уточнение нижней границы. Пусть известно некоторое значение $L_b(\mathbf{R},\ S)$. Сформируем контейнер следующим образом

$\widetilde{S}_i = S_i,\ i = \overline{1, N-1}$ и $\widetilde{S}_N = L_b(\mathbf{R},\ S)$. В этом случае получаем задачу ортогональной упаковки в замкнутую область $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$, которая была рассмотрена в первой главе. Если удастся доказать, что эта задача не имеет решения, то $L_b(\mathbf{R},\ S) < \Theta(\mathbf{R}, S)$ и значение $L_b(\mathbf{R},\ S)$ увеличивается.

В заключительном разделе главы приведено описание численного эксперимента. Для его проведения была разработана методика генерации тестовых примеров, а также были взяты задачи из $OR$-библиотеки. Проведенный вычислительный эксперимент показал, что полученные значения нижних границ достигаются в большинстве случаев. Помимо этого были выделены классы задач, на которых эту оценку не удается улучшить по сравнению с ранее известными методами.

**В третьей главе** рассмотрены вопросы эквивалентности различных задач ортогональной упаковки. Предложен комбинаторный метод нахождения оптимального решения, который основан на представленной во второй главе матричной модели. Пусть дана задача ортогональной упаковки в замкнутую область $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$. Определим множество

$$P_{\leq}(r^k, \widetilde{S_k}) := \{a\ :\ \sum a_i r_i^k \leq \widetilde{S}_k,\ a \in \{0,1\}^m\},\ k = \overline{1, N},$$

где $r^k = (r_k^1,\ \ldots\ , r_k^m)$. Будем говорить, что задачи ортогональной упаковки $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$ и $\left\langle \hat{\mathbf{R}},\ \hat{S} \right\rangle$ эквивалентны, если

$$P_{\leq}(r^k, \widetilde{S_k}) = P_{\leq}(\hat{r}^k, \hat{S}_k),\ \ k = \overline{1, N}.$$

В работе показано, что если задача $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$ эквивалентна $\left\langle \hat{\mathbf{R}},\ \hat{S} \right\rangle$, то из решения одной можно получить решение другой задачи и наоборот.

**Теорема 6.** *Задачи* $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$ *и* $\left\langle \hat{\mathbf{R}},\ \hat{S} \right\rangle$ *эквивалентны тогда и только тогда*

$$K(r^k, \hat{r^k}, S_k) \leq \hat{S}_k \text{ и } K(\hat{r^k}, r^k, \hat{S}_k) \leq S_k,\ k = \overline{1, N}.$$

Теорема 6 дает простое условие проверки эквивалентности двух произвольных задач. В диссертации показано, что множество размеров параллелепипедов задач, эквивалентных заданной, описывается выпуклым многогранником, что позволяет построить эквивалентную задачу, обладающую заданными свойствами. Для этой цели решается задача линейного программирования со специально заданной целевой функцией. Данная процедура позволяет выбрать наиболее удачную (в вычислительном плане) постановку задачи среди класса эквивалентных.

Во втором разделе главы представлен алгоритм типа ветвей и границ для нахождения оптимального решения задачи ортогональной упаковки в полубесконечную полосу.

Основным свойством матриц упаковок $A^k$, позволяющим организовать их эффективный перебор, является свойство симметрии.

**Теорема 7.** *Если для* $\left\langle \mathbf{R},\ \widetilde{S} \right\rangle$ *известные матрицы упаковки* $\widetilde{A^k}$ *и* $A^k$ *отличаются от другой только транспозицией столбцов, то* $\sum_{i=1}^{m} \widetilde{Z_i^k} = \sum_{i=1}^{m} Z_i^k$.

Базируясь на теореме 7 в работе выделены классы симметричных матриц $A^k$. Приведена процедура лексикографического упорядочивания матриц, которая позволяет из каждого класса симметрий генерировать только одного представителя.

Кроме того, в работе рассмотрены другие правила сокращения перебора: доминантность, допустимый резерв и т.д.

В заключительном разделе описаны особенности реализации алгоритма для $N = 2$, дано описание классов тестовых задач и полученных на них результатов. Проведено сравнение полученных результатов с другими известными алгоритмами, которые подтверждают конкурентоспособность матричного подхода. Даны практические рекомендации по использованию разработанного метода. Представленный подход является унифицированным, так как используемое матричное представление позволяет учитывать специфику постановок различных производственных задач, а также может служить основой для разработки приближенных методов.

**В четвертой главе** основным объектом исследования является задача одномерной упаковки. Установлены достаточные условия, при выполнении которых задача не обладает свойством целочисленного округления. Оценена вычислительная сложность задачи одномерной упаковки. Выделены наиболее трудные с точки зрения перебора классы задач. Разработан метод группировки, который преобразовывает исходную задачу в задачу меньшей размерности. Установлены достаточные условия, при которых сохраняется оптимальное решение.

Классическая задача одномерной упаковки состоит в следующем. Дан набор одномерных объектов длины $L$. В них необходимо упаковать предметы длин $l = (l_1, l_2, \dots l_m)$ в требуемых количествах $b = (b_1, b_2, \dots b_m)$, где $m$ – число типов предметов. Цель – минимизация количества использованных объектов. Входные данные задачи обозначим $E = (L, m, l, b)$.

В литературе данная задача известна как задача линейного раскроя. Она формулируется в виде задачи линейного целочисленного программирования. Наиболее удачная модель была предложена Л. В. Канторовичем, В. А. Залгаллером и, независимо, Р. Гомори и П. Гилмори: каждый допустимый способ упаковки объектов можно представить в виде $m$-мерного вектора $a^j = (a_1^j, \dots, a_m^j)^\top$, $j = 1, \dots, M_E$ с целочисленными неотрицательными компонентами, для которого выполнено ограничение $\sum_{i=1}^m l_i a_i^j \le L$. Данный вектор $a^j$, $j = 1, \dots, M_E$, называется *вектором упаковки*, $a_i^j$– количество $i$-ых предметов, входящих в $j$-ый вектор упаковки, $M_E$ – число всевозможных векторов упаковки.

Целое $x_j$ есть число объектов, которые должны быть упакованы в соответствии с вектором $a^j$. Тогда соответствующая модель линейного целочисленного программирования будет иметь вид

$$Z^*(E) = \sum_{j=1}^{M_E} x_j \to \min_x, \qquad A_E x = b, \quad x \in \mathbb{Z}_+^{M_E}. \tag{18}$$

Столбцами матрица $A_E \in \mathbb{Z}^{m \times M_E}$ являются всевозможные векторы упаковки $a^j$. Нижней границей оптимального значения задачи (18) является решение задачи непрерывной релаксации

$$Z_s(E) = \sum_{j=1}^{M_E} x_j \to \min_x, \quad A_E x = b, \quad x \in \mathbb{R}_+^{M_E}. \tag{19}$$

Говорят, что задача $E$ обладает свойством целочисленного округления (*IRUP, integer round-up property*), если $Z^*(E) - \lceil Z_s(E) \rceil = 0$.

А. Маркотте, И. Терно и другие ученые в своих исследованиях показали, что большинство задач одномерной упаковки обладает этим свойством; более того, пока не найдено ни одного примера, где бы $Z^*(E) - \lceil Z_s(E) \rceil \ge 2$. Поэтому имеет смысл рассматривать $Z_s(E)$ как нижнюю границу задачи (19).

Для проверки свойства целочисленного округления в задаче одномерной упаковки в диссертации предложен *метод значимых переменных*, который основан на идее метода Лэнда и Дойга.

Внесем в задачу (19) дополнительное ограничение, запрещающее использовать некоторый вектор упаковки $a^t$, и решим новую задачу с ограничением

$$Z_s^t(E) = \sum_{j=1}^{M_E} x_j \to \min_x, \quad Ax = b, \quad x_t = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^{M_E}. \tag{20}$$

Если $Z_s^t(E) > \lceil Z_s(E) \rceil$, то исходная задача обладает свойством целочисленного округления только при условии, что данный вектор $a^t$ входит в оптимальное решение. Обозначим редуцированную задачу как $E^t = (L, m, l, b - a^t)$.

**Теорема 8.** *Если для некоторой задачи $E$ существует $t$ $(0 < t \leq M_E)$ при котором $\lceil Z_s^t(E) \rceil > \lceil Z_s(E) \rceil$ и $\lceil Z_s(E) \rceil < 1 + \lceil Z_s(E^t) \rceil$, то $Z^*(E) - \lceil Z_s(E) \rceil \geq 1$.*

На основе на теоремы 8 в работе представлен полиномиальный алгоритм уточнения нижней границы для произвольной задачи одномерной упаковки. Для тестирования алгоритма были взяты примеры из банка трудных задач *www.math.tu-dresden.de/˜capad* (Дрезденский технический университет) и *www.apdio.pt/sicup*. В более чем половине случаев удалось показать, что данные примеры не обладают свойством целочисленного округления, что позволило получить их оптимальное решение.

Для нахождения оптимального решения задачи одномерной упаковки в диссертационной работе представлен алгоритм, который является модификацией метода ветвей и границ, разработанного И. В. Романовским и Б. А. Кацевым. Представим решение задачи $E$ в виде матрицы $\mathcal{A} = \left\| a^1, a^2, \ldots, a^n \right\|$, состоящей из векторов $a^j$, которые удовлетворяют условию $\sum_{j=1}^n a^j = b$. Алгоритм базируется на последовательном просмотре всех допустимых вариантов и выборе из них оптимального. Для организации перебора предлагается использовать лексикографическое упорядочивание матриц $\mathcal{A}$.

В работе предложены новые отсечения, основанные на свойстве доминантности. Задача $E_1$ доминирует над $E_2$, если каждому предмету из $E_1$ длины $\gamma$ можно сопоставить предмет из $E_2$ с длиной непревосходящей $\gamma$. Доказано, что если задача $E_1$ доминирует над $E_2$, то $Z^*(E_1) \leq Z^*(E_2)$.

В работе оценена мощность множества допустимых решений, которая совпадает с максимально возможным числом шагов соответствующего комбинаторного алгоритма. Без потери общности считаем, что для некоторой задачи $E$ все $b_i = 1$. Пусть $n$ – оптимальное решение задачи $E$ и $S(m,n)$ – максимально возможное число матриц решений размера $m \times n$. Используя «Гамма-функцию Эйлера» исходя из классического правила $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ получена оценка

**Лемма 3.**

$$S(m,n) \leq \frac{m!}{(k!)^{n-r} \cdot ((k+1)!)^r \cdot n!} \leq F(m,n) := \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma^n(\frac{m}{n}+1)\Gamma(n+1)},$$

*где $k = [m/n]$ – целая часть дроби, $r$ – остаток от деления $m$ на $n$ $(0 \leq r < n)$.*

В работе показано, что оценка из леммы 3 достижима.

Для выяснения зависимости $m/n$ ($m$ фиксированное число) при котором функция $S(m,n)$ достигает максимума, введем функцию

$$\Phi(m) = \frac{m}{\text{argmax}_n(F(m,n))},$$

которую можно трактовать как число предметов в векторе упаковки.

**Теорема 9.** *Функция $\Phi(m)$ при $m \to \infty$ имеет асимптотику $\Phi(m) \simeq \beta \ln m$, где $\beta$ некоторая константа.*

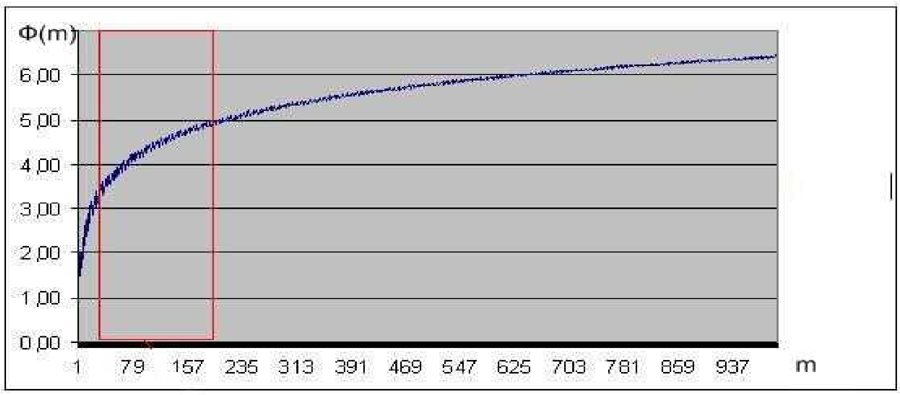


Рис. 2: График $\Phi(m)$, полученный поточечно

Для $m < 1000$ график $\Phi(m)$ был построен поточечно (рис. 2). Его вид согласуется с теоремой 9. Значение константы $\beta = 0,932$.

Полученный результат согласуется с данными П. Шверина и Дж. Вашера, которые в 1998 г. экспериментально выделили классы, трудные для комбинаторных алгоритмов для $m$ из диапазона от 40 до 200 (на рис. 2 они выделены прямоугольником). Результаты теоремы 9 можно использовать для формирования наиболее трудоемких тестовых задач, а также прогнозирования числа шагов переборного алгоритма.

Так как большинство задач одномерной упаковки обладает свойством целочисленного округления, для решения задач большой размерности принято формировать задачу остатка.

Пусть для некоторой задачи $E$ известно решение $x^c$ непрерывной задачи (19). Тогда $\bar{E} = (L, m, l, b - A\lfloor x^c \rfloor)$ – задача остатка.

**Теорема (И. Терно 1995).** *Если задача остатка $\bar{E}$ обладает свойством целочисленного округления, то и исходная задача $E$ обладает свойством целочисленного округления.*

Таким образом, для нахождения оптимального решения задачи $E$ достаточно показать, что $\bar{E}$ обладает свойством целочисленного округления. Однако оказывается, что данным фактом не всегда можно воспользоваться: при росте числа $m$ число шагов симплекс-алгоритма сильно возрастает, и при малых значениях $b$ задача остатка по вычислительной сложности эквивалентна исходной задаче $\bar{E} \approx E$.

В диссертации предложен *метод группировки*, который позволяет в ряде случаев уменьшить размерность $m$ без потери оптимального решения. Опишем идею метода.

Из исходной задачи $E = (L, m, b, l)$ генерируем некоторую задачу $E^g = (L^g, m^g, b^g, l^g)$, которая отвечает следующим условиям:

1. $L^g = L$.
2. $E$ доминирует над $E^g$.
3. $m^g < m$.
4. $\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m^g} b_i^g$.

В диссертации представлено несколько линейных алгоритмов построения группировочной задачи. Приведена оценка их поведения в худшем случае. На основе идее группировки предложен метод построения начального решения для задачи непрерывной релаксации (19).

**Теорема 10.** *Пусть для группировочной задачи $E^g$ известно некоторое допустимое базисное решение $x_b^{E^g} \in \mathbb{R}_+^{M_{E^g}}$ задачи непрерывной релаксации (19). Тогда ему сопоставляется вектор $x_b^E \in \mathbb{R}_+^{M_E}$, который является допустимым базисным решением задачи (19) с исходными данными $E$.*

Получаемый таким способом вектор $x_b^E$ используется в качестве начального решения для задачи $E$. Проведенный численный эксперимент показал, что использование процедуры группировки снижает время нахождения непрерывного решения в среднем в два раза. Кроме того, в работе выделены случаи, при которых процедура группировки не дает улучшения.

Другим вариантом использования метода группировки является уменьшение размерности задачи остатка.

**Теорема 11.** *Если $Z^*(E^g) - \lceil Z_s(E^g) \rceil = 0$ и $\lceil Z_s(E) \rceil = \lceil Z_s(E^g) \rceil$, то $Z^*(E^g) = Z^*(E)$.*

Теорема 11 используется для построения задачи остатка $\bar{E}^g$, которая имеет меньшую размерность по сравнению с исходной задачей $\bar{E}$ без потери оптимального решения. В работе приведен алгоритм построения задачи $E^g$, а также предложен обобщенный алгоритм нахождения оптимального решения для задачи одномерной упаковки.

**В пятой главе** рассмотрено применение предложенных ранее методов для задачи упаковки фигур сложной формы. Введена задача упаковки N-мерных ортогональных многогранников. Выделены необходимые условия размещения фигур в прямоугольных областях. Предложены различные алгоритмы для решения производственных задач, связанных с ортогональной упаковкой.

В первом разделе приведено общее описание задачи размещения сложных фигур и методы их ортогонального приближения.

Во второй части поставлена задача размещения ортогональных многогранников.

*Ортогональным многогранником* (ОМ) называется фигура, состоящая из конечного числа неперекрывающихся N-мерных прямоугольных параллелепипедов, ребра которых параллельны осям координат и с фиксированным положением относительно друг друга.

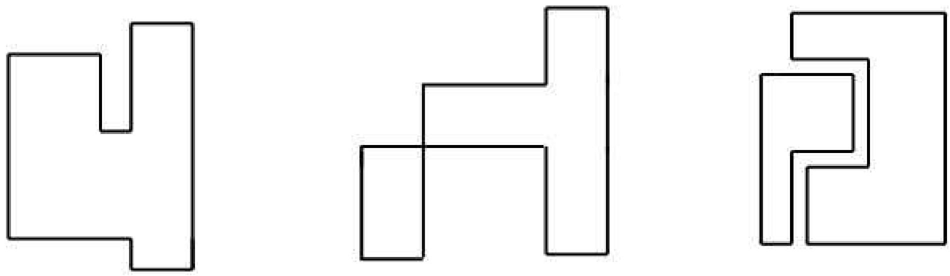

Рис. 3: Примеры ортогональных многогранников на плоскости

Пусть даны $m$ ортогональных многогранников $\mathbf{O}= \{O_1,\ O_2,\ \ldots,\ O_m\}$. Каждый ортогональный многогранник $O_i \in \mathbf{O}$ задается набором из $N$-мерных ортогональных параллелепипедов. Обозначим его $\mathbf{R_i} = \left(R_1^i,\ R_2^i,\ \ldots,\ R_{d_i}^i\right)$. Здесь $d_i$ – число параллелепипедов, входящих в набор. Область, в которую размещаются ОМ, может быть различной, в зависимости от постановки задачи. Это может быть полубесконечная или ограниченная область.

Размещение ортогональных многогранников назовем рациональным, если оно является плотным и никакой ортогональный многогранник нельзя разместить в свободную область, расположенную «левее» его текущего расположения. Для рационального размещения ортогональных многогранников сопоставим каждому $O_i$ набор из $N$ функций, отвечающих мерам сечений по каждому координатному направлению $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

$$K_{ij}(t) = \mathrm{mes}(O_i \cap \{x_j = t\}), \quad j = \overline{1, N},\ \ i = \overline{1, m},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Функции $K_{ij}(t)$ называются **кортежами**.

Данная модель позволяет легко реализовать поворот ортогональных многогранников на $90^o$ и $180^o$. Так, для поворота $O_i$ на $90^o$ с $j_1$ на $j_2$ направление достаточно только поменять местами функции $K_{ij_1}$ с $K_{ij_2}$, а для поворота на $180^o$ градусов по $j_1$ оси достаточно только развернуть $K_{ij_1}$ т.е. $K_{ij}^{180^o}(t) = K_{ij}^{180^o}(t_j^0 - t)$, где $t_j^0 = \mathrm{argmax}_{t\in\mathbb{R}}\{t\,|\,(K_{ij}(t) > 0)\}$.

С помощью функций $K_{ij}(t)$ также удобно задавать необходимое условие размещения ОМ. Для этого сопоставим произвольной упаковке $\mathbf{P}$ набор из $N$ функций $H_j(t) = K_{1j}(t - x_j^1) + \cdots + K_{mj}(t - x_j^m)$, имеющих смысл суммы мер сечений всех ОМ по $j-$му направлению. Необходимое условие допустимого размещения ОМ задает следующая

**Теорема 12.** *Если размещение ортогональных многогранник* $\mathbf{O}$ *в область* $\mathbf{S}$ *допустимо, то*

$$H_j(t) \leq \prod_{\bar{j} \in J \setminus j} S_{\bar{j}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, N}.$$

На основе теоремы 12 предложено декомпозиционное представление области допустимого размещения ОМ. Каждому координатному направлению сопоставляются кусочно-линейные функции $H_j$. С их помощью определяются координаты возможного размещения ОМ. Допустимость предполагаемого размещения проверяется с помощью условия взаимного перекрытия параллелепипедов.

Предложенный метод определения свободных областей позволяет учитывать все пространство размещения, что дает возможность получать плотное размещение фигур сложных форм (например, спирали, фигуры с «дырками»и т.д.). В работе рассмотрено несколько подходов для формирования плотного размещения ОМ. Они основаны на методе случайной выборки, методе локального максимума и методе имитации отжига. Также была рассмотрена задача планирования в условиях массового производства упаковки ОМ.

В третьем разделе главы приведено описание разработанного программного обеспечения. Представленное программное обеспечение позволяет решать широкий класс практических задач, связанных с ортогональной упаковкой различных геометрических объектов. Оно получает планы упаковки в единичном и массовом производстве. Отдельно реализован модуль оценки качества получаемого решения. Разработанное программное обеспечение может использоваться как самостоятельно, так и в качестве встроенного модуля системы автоматизации производства. Дано описание численного эксперимента и примеры решения ряда практических задач. Представлены рекомендации по настройке параметров работы алгоритма для различных практических постановок. В частности рассматривается задача размещения разверток коробок на листы в условиях массового производства.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

## Основные результаты

Результаты, полученные в данной работе, носят системный характер, поскольку, с одной стороны, они касаются общей теории дискретной оптимизации, а с другой стороны, они позволяют решать оптимизационные задачи промышленности, связанные с упаковкой и размещением различных ортогональных объектов. Основные результаты:

1. Разработан метод построения декомпозиции оптимизационной задачи N-мерной ортогональной упаковки. На его базе построена линейная релаксация множества решений и получена оценка оптимального значения целевой функции снизу. Установлены условия уточнения этой оценки. [7,9,12]

2. Предложено и обосновано матричное представление ортогональной упаковки. На основе этого представления, разработан метод нахождения оптимального решения задачи N-мерной ортогональной упаковки в полубесконечную полосу. Доказаны условия эквивалентности задач ортогональной упаковки. [2,5,6]

3. Получены критерии максимальности зависимой от данных двойственно-допустимой функции. На их базе разработан полиномиальный алгоритм нахождения оценок оптимального решения задачи ортогональной упаковки. [12]

4. Представлен и исследован метод группировки, позволяющий находить оптимальное решение задачи одномерной упаковки большой размерности путем решения эквивалентной редуцированной задачи. [4,10]

5. Получены условия уточнения оценки оптимального решения задачи одномерной упаковки. Разработан модифицированный метод ветвей и гра-

ниц для нахождения оптимального решения задачи одномерной упаковки. Оценена его вычислительная сложность. Выделены наиболее трудные с точки зрения перебора классы задач. [1,3,11]

6. Дано декомпозиционное представление задачи упаковки N-мерных ортогональных многогранников сложной формы. Предложены оптимизационные алгоритмы, направленные на решение ряда практических задач промышленности, связанных с ортогональной упаковкой. [8]

7. Разработано специализированное программное обеспечение для оптимизации систем на базе ортогональной упаковки, реализующее предложенные в диссертации алгоритмы. Проведен вычислительный эксперимент, подтвердивший эффективность разработанных методов на известных из литературы сериях тестовых примеров и примерах из OR-библиотеки. [2,8]

## Основные результаты диссертации полностью опубликованы в следующих работах

*Публикации в рецензируемых журналах из перечня ВАК*

1. Мухачева Э.А., Картак В.М. Модифицированный метод ветвей и границ: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя // Информационные технологии. – 2000. – №9. – С. 15-21.

2. Мухачева Э.А., Картак В.М., Мухачева А.С., Валеева А.Ф. Модели и методы решения задач ортогонального раскроя и упаковки: аналитический обзор и новая технология блочных структур // Информационные технологии. – 2004. – №5. – С.2-17.

3. Картак В.М. Достаточные условия невыполнения свойства целочисленного округления для задачи линейного раскроя // Автоматика и телемеханика. – 2004. – №4. – С. 55-62.

4. Картак В.М. Использование метода группировки для решения задачи линейного раскроя. // Вестник БашГУ. – 2005. – №3. – С.9-13.

5. Картак В.М. Задача упаковки прямоугольников: точный алгоритм на базе матричного представления // Вестник УГАТУ: научн. журн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2007. – Т.9, №4(22). – С. 104-110.

6. Картак В.М. Матричный алгоритм поиска оптимального решения для задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу // Информационные технологии. – 2008. – №1. – С. 36-44.

7. Картак В.М. Обновленная нижняя граница для задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу // Вестник УГАТУ: научн. журн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2008. – Т.10, №2(27). – С.154-158.

8. Картак В.М., Васильева Л.И., Мухачева Э.А., Петунин А.А. Задача размещения прямоугольно-ориентированных многоугольников: модели и алгоритм покоординатной упаковки // Информационные технологии. – 2008. – №3. – С.46-54.

9. Картак В.М., Месягутов М.А., Мухачева Э.А., Филиппова А.С. Локальный поиск ортогональных упаковок с использованием нижних границ // Автоматика и телемеханика. – 2009. – №6. – С. 167-180.

10. Картак В.М. Метод группировки для решения непрерывной задачи линейного раскроя // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – Т.3, №16. – С. 47-62.

В работах, опубликованных в соавторстве, диссертантом были получены следующие результаты: обоснование метода мерной декомпозиции [2]; разработка точного метода [5]; описание точных методов и способов получения оценок [6]; разработка декомпозиционного представления ОМ, процедура их упаковки [10].

*Рецензируемые зарубежные журналы*

11. Мухачева Э.А., Белов Г.Н., Картак В.М., Мухачева А.С. Одномерная проблема раскроя-упаковки: вычислительный эксперимент мето-

да уточнения оценок и модифицированного метода ветвей и границ // Pesquisa Operacional. – 2000. – V. 2, №20. – Pp.153-168. (статья на англ.)

12. Г. Белов, В. Картак, Х. Роллинг, Г. Шайтхауер. Одномерная релаксация и LP граница для ортогональной упаковки. // International Transactions on Operational Research. – 2009. – №16. – Pp. 745-766. (статья на англ.)

*Монография:*

13. Мухачева А.С., Картак В.М., Валеева А.Ф. Задачи двумерной упаковки в контейнеры: новые подходы к разработке методов локального поиска оптимума. // М:Издательство МАИ. – 2004. – 193 С.

*Другие основные публикации:*

14. Картак В.М. Комбинаторные методы для получения оптимального целочисленного решения в задачах одномерного раскроя // Принятие решений в условиях неопределенности. – Уфа, 1996. – С. 53-58.

15. Картак В.М. Комбинаторный алгоритм для решения линейной упаковки // Принятие решений в условиях неопределенности. – Уфа, 1997. – С. 30-36.

16. Мухачева Э.А., Картак В.М. Интеграционный подход к решению задачи линейного раскроя // Вычислительная техника и новые информационные технологии. Межвузовский научный сборник. Выпуск третий. –Уфа, 1999. –С. 55–64.

17. Картак В.М., Васильева Л.И. Двумерная упаковка гофров на листах в условиях непрерывного производства // Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности. / Материалы научной конференции. – Уфа, УГАТУ, 2000. –С. 403-407.

18. Мухачева Э.А., Картак В.М., Васильева Л.И. Задача планирования n-мерных упаковок гофров // Распределительные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде. Материалы Международной конференции. – Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2000. – С. 152-156.

19. Картак В.М., Васильева Л.И. Задача двумерной упаковки гофров // Принятие решений в условиях неопределенности. Межвузовский научный сборник. – Уфа, 2000, –С. 108-112.

20. Картак В.М. Алгоритм проверки свойства IRUP для задачи линейного раскроя // Алгебра и линейная оптимизация: Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С.Н.Черникова. – Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2001. – С. 271-276.

21. Картак В.М. Оптимальная упаковка N-мерных параллелепипедов в полубесконечную область // 12-я Байкальская международная конференция: Методы оптимизации и их приложения. Прикладные задачи оптимизации и динамики. – Иркутск, 2001. – С. 19-22.

22. Картак В.М. Алгоритм проверки невыполнения свойства целочисленного округления для задачи линейного раскроя // Сборник трудов третьей региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. – Уфа, БашГУ, 2003. – С. 88-100.

23. Картак В.М., Картак В.В. Использование метода группировки для точного решения задачи линейного раскроя // Принятие решений в условиях неопределенности. Вып. 2. – Уфа, УГАТУ, 2005. – С. 123-128.

24. Картак В.М. Точный алгоритм для решения задачи одномерного раскроя //Сборник статей 2-й региональной зимней школы-семинара аспирантов и молодых ученых. – Уфа: Издательство «Технология», 2007. – С. 44-50.

25. Картак В.М., Месягутов М.А., Валеев Р.С. Нижняя граница для задачи упаковки в полосу: линейная и 1d продолженная релаксация// Preprints of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing.– Moscow, Russia: 2009. – June 3-5/ – Pp. 2003-2007. (статья на англ.)

КАРТАК Вадим Михайлович

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ N-МЕРНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ УПАКОВКИ НА БАЗЕ СЕЧЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Специальность 05.13.01
«Системный анализ, управление и обработка информации
(в промышленности)»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Подписан к печати 20.06.2011. Формат $60 \times 84$ 1/16.
Печать плоская. Бумага офисная.
Усл.печ.л. 2,0. Уч.-изд.л. 1,9
Тираж 100 экз. Заказ № 204

ФГБОУ ВПО Уфимский государственный авиационный
технический университет
Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа – центр, ул. К.Маркса, 12