На правах рукописи

ЮРЬЕВА Екатерина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ШУМА

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2011

Работа выполнена на кафедре математики в ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель	д-р физ.-мат. наук, проф. **НАСЫРОВ Фарит Сагитович**
Официальные оппоненты	д-р физ.-мат. наук, проф. **ТИХОВ Михаил Семенович** кафедра прикладной теории вероятностей Нижегородского государственного университета им Н. И. Лобачевского
	канд. физ.-мат. наук, зав. каф. **ЗАХАРОВ Андрей Владимирович** кафедра прикладной информатики Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы
Ведущая организация	**Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН,** г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 21 декабря 2011 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. К. Маркса, д. 12, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан «___» ____________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета **БУЛГАКОВА Г. Т.**
д-р физ.-мат. наук, проф.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы

В настоящее время актуальной задачей математического моделирования является разработка новых численно-аналитических методов решения стохастических дифференциальных уравнений. В данной работе исследуются модели колебательных процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка гиперболического типа и испытывающих случайное воздействие в виде пространственно-временного шума. Кроме того, исследуется теоретическая задача о связи решений стохастических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с шумом в виде многомерного случайного процесса с непрерывными траекториями с решениями системы дифференциальных уравнений с симметричными интегралами.

В работе, во-первых, рассматривается задача моделирования динамического поведения гибких длинных объектов, в частности, неразветвленных молекул полимеров (например, макромолекул полиэтилена или ДНК). Они находятся в растворе и имеют в нем слабую концентрацию, поэтому взаимодействия между длинными молекулами практически нет, они полностью окружены молекулами растворителя меньшего размера. В рамках данной модели молекула полимера представляется как последовательность бусинок, соединенных пружинками.

Динамическое поведение полимерной цепи впервые было рассмотрено В.А. Каргиным и Г.Л. Слонимским в 1948 г., а затем Х. Раузом в 1953 г. Тем не менее, в литературе модель динамики цепочек получила название модели Рауза. Она широко используется в статистической физике макромолекул, в механике сплошных сред, в механике полимеров для изучения свойств полимерных веществ и улучшения их параметров (см. работы Гросберга А.Ю., Хохлова А.Р., Groesen E., Molenaar J. и других авторов). Первые исследования конфигураций полимеров проводились с использованием моделей случайных блужданий. На протяжении последних 70 лет изучение статистических свойств длинных гибких полимерных цепочек и моделей случайных блужданий развивалось параллельно (см. Гулд Х., Тобочник Я., Биндер К., Хеерман Д.В. и др.).

Второй класс моделей, рассматриваемых в работе, описывается дифференциальными уравнениями гиперболического типа, в которых случайное воздействие представляет собой пространственно-временной шум, сконцентрированный на гиперплоскости. Такие уравнения могут быть получены при моделировании следующего явления. Дождь капает на поверхность озера, порождая звуковые волны, которые распространяются над водой. Этот шум складывается из большого количества падений маленьких капелек дождя. После проведения соответствующего масштабирования шум, распространяющийся в трехмерной среде, можно считать пространственно однородным у поверхности озера. Следовательно, шум действует на 2-мерной границе 3-мерной области.

Существует несколько подходов к изучению дифференциальных уравнений, возмущаемых шумом, сконцентрированным на многообразиях. Одномерные случаи, когда шум на границе является точечным, исследованы в работах Alòs E., Bonnacorsi S., Da Prato G., Zabczyck J., Mao X., Markus L.

В пространствах с большей размерностью параболические уравнения с шумом изучались Dawson D. A., Salihi H., в гиперболическом случае для волновых уравнений - Mueller C., Dalang R. C., Frangos N. E., Millet A., Sanz-SoléM., Peszat S., Zabczyck J. В упомянутых работах исследуются условия существования и единственности решений такого рода задач, приводятся различные оценки решений. Однако явные решения были построены лишь для простейших частных случаев. Кроме того, эти решения представляли собой стохастические интегралы сложной структуры.

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка исследовались в работах Крылова Н.В., Розовского Б.Л. и других, где были представлены условия разрешимости задач, содержащих такие уравнения, а также аналитические свойства их решений. Однако моделирование этих решений оставалось трудноразрешимой задачей. Третья задача в работе посвящена исследованию связи решений дифференциальных уравнений в частных производных с симметричными интегралами и решений систем дифференциальных уравнений с симметричными интегралами.

Проблемам моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений в частных производных посвящены работы Кузнецова Д. Ф., Мильштейна Г. Н., Allen E., Kloeden P. E., Platen E. и других ученых. Тем не менее, многие вопросы численного моделирования решений таких уравнений остаются открытыми. Поэтому построение новых численно-аналитических методов решения дифференциальных уравнений в частных производных со случайным внешним воздействием, возникающих при моделировании многих задач физики, химии, биологии и технических наук, является весьма актуальной задачей.

Цель работы

Целью данной работы является моделирование колебательных процессов, которые описываются стохастическими дифференциальными уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа, с помощью разработанных численно-аналитических методов решения указанных стохастических уравнений и их детерминированных аналогов с симметричными интегралами.

Поставленная цель достигается в результате решения следующих задач:

1. Модификация существующих математических моделей физических процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями в

частных производных гиперболического типа, которая заключается в том, что внешние воздействия в предложенных моделях представляют собой многомерные пространственно-временные шумы, имеющие конкретный вид.

2. Разработка аналитического аппарата для решения дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с пространственно-временными шумами различных типов, для решения систем дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами, обобщение метода характеристик для решения классических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка на случай дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами.

3. Построение численно-аналитических методов решения и моделирования динамического поведения длинных гибких объектов под действием пространственно-временного шума и колебательных процессов, вызванных пространственно-временным шумом, сконцентрированным на гиперплоскости.

4. Реализация разработанных численно-аналитических алгоритмов решения и моделирования указанных процессов в виде готового программного комплекса с визуализацией результатов вычислений.

Методы исследования

Аналитические исследования проводились с использованием методов теории случайных процессов, математической физики, теории обобщенных функций, теории функций действительной переменной, функционального анализа и вычислительной математики. Для реализации построенных численно-аналитических алгоритмов использовалась среда программирования Delphi XE.

На защиту выносятся:

1. Численно-аналитический метод исследования колебательных процессов, в которых внешнее воздействие представляет собой многомерный пространственно-временной шум и которые описываются с помощью неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. В частности, этот способ применим к исследованию модели изменения конфигурации длинных неразветвленных молекул полимеров (или молекул ДНК) в разбавленных растворах.

2. Численно-аналитический метод исследования колебательных процессов, в которых внешнее воздействие представляет собой шум, сконцентрированный на гиперплоскости, и которые описываются с помощью неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. С помощью данного метода смоделирован процесс возмущения плоской поверхности случайной силой, действующей перпендикулярно к этой поверхности вдоль прямой.

3. Аналитический метод решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом, являющийся аналогом метода характеристик для решения классических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Способ решения систем дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами.

Научная новизна

1. Модифицированная модель динамического поведения длинных гибких объектов на примере модели движения макромолекул полимеров в разбавленных растворах, главное отличие которой от аналогичных известных моделей заключается в том, что случайное воздействие на объект представлено в виде многомерного пространственно-временного шума конкретного вида.

2. Метод решения неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с внешним воздействием в виде многомерного шума, содержащего формальные производные симметричных интегралов.

3. Метод решения неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с внешним воздействием в виде пространственно-временного шума, сконцентрированного на гиперплоскости.

4. Модификация классического метода характеристик для решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных с многомерными симметричными интегралами.

Теоретическая и практическая значимость

Представленные в данной работе методы численно-аналитического решения некоторых классов дифференциальных уравнений и систем уравнений с симметричными интегралами могут быть использованы для исследования широкого перечня моделей, описывающих различные физические, механические, биологические процессы, характеризуемые наличием случайных возмущений в виде стохастических пространственно-временных шумов.

Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена строгостью аналитических доказательств полученных результатов. Численные схемы исследованы на предмет сходимости.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены и обсуждались на научных семинарах и конференциях, соответствующих профилю диссертации. В частности были сделаны доклады:

1) на XXVII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (г. Москва, 2005 г.);
2) на XII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва, 2006 г.);

3) на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (г. Ростов-на-Дону, 2006 г.);
4) на XIV Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва, 2007 г.);
5) в рамках Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова (г. Ростов-на-Дону, 2008 г.);
6) на XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва, 2009 г.);
7) на Международном молодежном научном форуме "ЛОМОНОСОВ-2011" (г. Москва, 2011 г.);
8) на семинаре по теории вероятностей и случайным процессам кафедры математики УГАТУ, руководитель - профессор Насыров Ф.С. (г. Уфа, 2006-2011 гг.);
9) на семинаре в Институте математики с ВЦ УНЦ РАН, руководитель - профессор Жибер А.В. (г. Уфа, 2011 г.);
10) на семинаре в Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, руководитель - академик РАН Михайлов Г.А. (г. Новосибирск, 2011 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[10], в том числе 3 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК, и 7 публикаций в других изданиях.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, разбитых на параграфы, 18 рисунков, заключения, библиографического списка литературы, включающего 80 работ отечественных и зарубежных авторов, 1 приложения. Общий объем работы составляет 161 страницу.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение. Во введении обосновывается актуальность работы, сформулированы ее цели и задачи. Кроме этого, дан краткий обзор по тематике вопроса, сформулированы основные результаты, полученные в работе, излагается описание диссертации по главам.

Глава 1. Постановка задачи

В данной главе строятся математические модели колебательных процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных со случайными возмущениями в виде пространственно-временных шумов. Кроме того, ставится задача аналитического решения уравнений в частных производных первого порядка с многомерными симметричными интегралами.

Первая модель связана с динамическим поведением длинных неразветвленных гибких объектов под действием случайных сил, которое описывается с помощью уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с возмущающей силой в виде многомерного пространственно-временного шума:

$$u''_{tt} + \beta u'_t - u''_{xx} = \varepsilon_1 * W'_1(t) + \varepsilon_2 * W'_2(x), \tag{1}$$
$$x \in (0,1), \qquad t \in (0,T),$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u'_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in [0,1]$$
$$u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=1} = 0, \quad t \in [0,T],$$

где $\beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R$, производные винеровских процессов $W'_1(t)$, $W'_2(x)$ понимаются в смысле формальной производной интеграла Стратоновича, а само уравнение (1) понимается в интегральной форме. Данная модель возникает, в частности, при описании процесса изменения конфигурации длинных неразветвленных молекул полимеров (полиэтилена, ДНК) в разбавленных растворах и расплавах.

В качестве второй модели рассматривается математическая модель волновых процессов, описываемая дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа с шумом, сконцентрированным на гиперплоскости, и действующим перпендикулярно к ней. Примером такого процесса является распространение звуковых волн над поверхностью озера, порожденных ударами капелек дождя о поверхность воды. Модель, представленная в работе Dalang R. C., Lévêque O.[1], модифицирована в том смысле, что стохастический гауссовский шум в исходной задаче заменен на шум в более общей постановке в виде симметричных интегралов по произвольным непрерывным функциям. В частности, это могут быть траектории винеровского процесса, фрактального броуновского движения, стационарных случайных процессов с непрерывными реализациями. Данная модель описывается уравнением

$$u''_{tt} + 2au'_t + bu - \Delta u =$$
$$= \left[g\left(t, \bar{x}_1, 0, X(t)\right) + h\left(t, \bar{x}_1, 0, X(t)\right) * X'(t)\right]\delta_0(x_2),$$
$$\bar{x} \in D, \qquad t \in (0,T),$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(0,\bar{x}) = u_0(\bar{x}), \qquad u'_t|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \qquad \bar{x} \in D \cup S_T,$$
$$u(t,\bar{x})|_{x \in S_T} = \mu(t), \qquad t \in [0,T],$$

где $a, b \in R, x = (\bar{x}_1, x_2) \in R^{d-1} \times R, g, h$-обобщенные функции из $S'(R^d), D$– ограниченная область в R^d, S_T–граница "цилиндра" с основанием D при $t = 0$,

[1] Dalang R. C., Lévêque O. Second-order hyperbolic SPDE's driven by homogeneous gaussian noise on a hyperplane. - Transactions of the AMS, 2006. - Vol. 358, n.5.- Pp. 2123-2159.

направленного вдоль оси времени, $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа.

Третья основная задача заключается в обобщении результатов Крылова Н.В., Розовского Б.Л.[2], касающихся свойств решений стохастических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. А именно, требуется выявить связь между уравнением в частных производных первого порядка с многомерными симметричными интегралами

$$d_t u\big(t,\bar{x},\bar{X}(t)\big) = -\sum_{i=1}^{n} B^i\big(t,\bar{x},\bar{X}(t)\big) u'_{x_i}\big(t,\bar{x},\bar{X}(t)\big)dt - \tag{2}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}\big(t,\bar{x},\bar{X}(t)\big) u'_{x_i}\big(t,\bar{x},\bar{X}(t)\big) * dX_j(t),$$
$$u\big(0,\bar{x},\bar{X}(0)\big) = x_k,$$

где x_k в начальном условии – k-ая координата переменной $x \in R^n$, и соответствующей системой уравнений с многомерными симметричными интегралами с теми же коэффициентами:

$$\begin{cases} d\eta_i(t,\bar{x}) = B^i\big(t,\bar{\eta}(t,\bar{x}),\bar{X}(t)\big)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}\big(t,\bar{\eta}(t,\bar{x}),\bar{X}(t)\big) * dX_j(t), \\ \eta_i(0,x) = x_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Одной из целей в рамках данной задачи является обобщение метода характеристик из теории классических дифференциальных уравнений для выявления структуры решения уравнений типа (2).

Глава 2. Разработка аналитического аппарата, необходимого для решения поставленных задач

В главе 2 сформулированы теоретические результаты данной работы и приведены основные сведения и определения.

В § **2.1** приводятся используемые в работе понятия из теории случайных процессов и теории функций вещественной переменной, определения стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Вводится определение и условия существования симметричного интеграла, который является детерминированным аналогом интеграла Стратоновича, а также его обобщения: расширенный симметричный интеграл, симметричный интеграл от обобщенных функций. Строится многомерный симметричный интеграл.

Пусть $X(s), s \in R_+$, - произвольная непрерывная функция, $\sigma(s,v)$, $s \in R_+$, $v \in R$, - измеримая по s и v функция. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка

[2] Крылов Н.В., Розовский Б.Л. Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и диффузионные процессы. - М.: Мир, 2002. - 152 с.

$[0,t]: T_n = \left\{t_k^{(n)}\right\}, 0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \cdots \leq t_k^{(n)} \leq \cdots \leq t_{m_n}^{(n)} = t,\ n \in N,$ такие, что $T_n \subset T_{n+1},\ n \in N,$ и $\lambda_n = \max_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n, а через $N^{(n)}(t,u) = \sum_{s \leq t} 1\left(X^{(n)}(s) = u\right)$ соответствующую ей индикатрису Банаха. Положим $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}, \left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right], \Delta X_k^{(n)} = X\left(t_k^{(n)}\right) - X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)$.

Определение. Симметричным интегралом называется интеграл вида

$$\int_0^t \sigma\big(s, X(s)\big) * dX(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{\left[\Delta t_k^{(n)}\right]} \sigma\left(s, X^{(n)}(s)\right) ds \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n,\ n \in N$.

Представлены формулы для вычисления симметричного и расширенного симметричного интегралов, а также формула связи между этими интегралами. Показано, как обобщенная формула Ито с расширенным симметричным интегралом сводится к классической формуле Ито.

В § **2.2** представлены основные теоретические результаты, касающиеся решений некоторых классов дифференциальных уравнений с симметричными интегралами, необходимые для исследования изучаемых моделей.

Рассматривается класс дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с внешним воздействием в виде многомерного шума, содержащего формальные производные симметричных интегралов. Пусть $X_1(t), t \in R, X_2(x), x \in R -$ непрерывные функции неограниченной вариации на любом конечном интервале. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа на функцию $u = u(t,x)$:

$$u''_{tt} + 2au'_t + bu - u''_{xx} = f(t,x) + g\big(t,x,X_1(t)\big) * X'_1(t) + h\big(t,x,X_2(x)\big) * X'_2(x),$$
$$x \in (x_0, x_1), \quad t \in (t_0, t_1), \tag{3}$$

с начальными и краевыми условиями:

$$u(t_0,x) = u_0(x), \quad u'_t|_{t=t_0} = u_1(x), \quad x \in [x_0,x_1], \tag{4}$$
$$u(t,x_0) = \mu_0(t), \quad u(t,x_1) = \mu_1(t), \quad t \in [t_0,t_1],$$

где $\forall \xi, \eta\ \ g(t,x,\xi),\ h(t,x,\eta) -$ ограниченные функции на множестве $(t,x) \in [t_0,t_1] \times [x_0,x_1]$, непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам, коэффициенты $a, b \in R$. В уравнении (3) $X'_1(t),\ X'_2(x) -$ формальные производные функций $X_1(t), X_2(x)$, которые понимаются в форме симметричного интеграла, а само уравнение (3) следует понимать в интегральной форме.

Решение ищется в виде

$$u(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} q\big(s,y,X_1(s),X_2(y)\big)dy\,ds+u_0(x)+\mu_0(t),$$

где $u(0,x)=u_0(x)$, $u'_t|_{t=0}=u_1(x)$, $q=q(s,y,\xi,\eta)-$ при каждом $\xi,\eta\in R$ суммируемая на $(s,y)\in[t_0,t_1]\times[x_0,x_1]$ функция с непрерывными производными первого порядка по всем аргументам. Доказывается и затем применяется при решении уравнения (3) аналог теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования в кратных интегралах для симметричных интегралов.

Показано, что решение краевой задачи (3)-(4) для дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа с многомерным шумом в правой части, содержащим формальные производные симметричного интеграла (детерминированного аналога стохастического интеграла Стратоновича), сводится к решению краевой задачи с дифференциальным уравнением в частных производных того же типа, не содержащим симметричные интегралы в правой части и на границе.

В рамках второй задачи рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа

$$u''_{tt}+2au'_t+bu-\Delta u=\big[g\big(t,\overline{x}_1,0,X(t)\big)+h\big(t,\overline{x}_1,0,X(t)\big)X'(t)\big]\delta_0(x_2), \qquad (5)$$

$$\overline{x}\in D,\quad t\in(0,T),$$

с начальными и краевыми условиями:

$$u(0,\overline{x})=u_0(\overline{x}),\quad u'_t|_{t=0}=u_1(\overline{x}),\quad \overline{x}\in D\cup S_T, \qquad (6)$$

$$u(t,\overline{x})|_{\overline{x}\in S_T}=\mu(t),\quad t\in[0,T], \qquad (7)$$

где $X(s)$, $s\in R_+-$ произвольная непрерывная функция неограниченной вариации, $a,b,\in R, x=(\overline{x}_1,x_2)\in R^{d-1}\times R, g,h-$ обобщенные функции из $S'(R^d)$, $D-$ ограниченная область в R^d, S_T- граница "цилиндра" с основанием D при $t=0$, направленного вдоль оси времени, $\Delta=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-$ оператор Лапласа.

Здесь и далее $S(R^d)-$ пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на R^d, $S'(R^d)-$ двойственное к нему пространство медленно растущих обобщенных функций на R^d, $C_0^\infty(R^d)-$ пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^d, $\langle z,\phi\rangle-$ значение функционала $z\in S'(R^d)$ на произвольной пробной функции $\phi\in S\,(R^d)$.

Заметим, что в уравнении (5) $X'(t)$ – формальная производная функции $X(t)$, которая понимается в форме симметричного интеграла. Поэтому, во-первых, уравнение (5) следует понимать в интегральной форме. Кроме того, так как в правой части уравнения (5) содержится дельта-функция Дирака $\delta_0(x_2)$, то, фактически, мы имеем уравнение вида

$$\langle u'_t(t,\overline{x})-u'_t(0,\overline{x})+2au(t,\overline{x})-2au(0,\overline{x})+$$

$$+b\int_0^t u(s,\overline{x})ds - \int_0^t \Delta u(s,\overline{x})ds, \phi(\overline{x})\rangle = \qquad (8)$$
$$= \langle\int_0^t g\big(s,\overline{x}_1,0,X(s)\big)\delta_0(x_2)ds, \phi(\overline{x})\rangle +$$
$$+\langle\int_0^t h\big(s,\overline{x}_1,0,X(s)\big)\delta_0(x_2) * dX(s), \phi(\overline{x})\rangle, \qquad \phi \in S\,(R^d),$$
и решение ищем в классе обобщенных функций.

Слабым решением первой краевой задачи (5)-(7) в области $D\times[0,T]$ называется обобщенная функция $u(\overline{x},t)$ из класса $S'(R^d)$, удовлетворяющая уравнению (8) в области $D\times[0,T]$, начальным условиям (6) на нижнем основании цилиндра S_T и граничным условиям (7) на его боковой поверхности.

Решение уравнения (5) ищется в виде
$$u(t,\overline{x}) = \int_0^t q\big(s,\overline{x},X(s)\big)ds + u_0(\overline{x}), \qquad u(0,\overline{x}) = u_0(\overline{x}), \quad u'_t|_{t=0} = u_1(\overline{x}),$$
где $q = q(t,\overline{x},v) \in S'(R^d)$, $t\in R_+$, $\overline{x}\in R^d$, $v\in R$, является обобщенной функцией по $\overline{x}$, а функция $Q(t,v) = \langle q(t,\overline{x},v), \phi(\overline{x})\rangle$ имеет совместно непрерывную производную $Q''_{tv}(t,v)$ для любой пробной функции $\phi\in S(R^d)$.

В настоящем параграфе показано, что существование и единственность слабых решений задач (5)-(7) вытекают из существования и единственности обобщенных решений задач с дифференциальными уравнениями того же типа, что и исходное, не содержащих симметричных интегралов в правой части и на границе. Предложенная в работе техника позволяет моделировать процессы, описываемые с помощью задач такого типа.

Далее строится метод характеристик для решения дифференциальных уравнений в частных производных с многомерными симметричными интегралами. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами:
$$\begin{cases}\eta_i(t) = \eta_i^0 + \int_0^t B^i\left(s,\overline{\eta}(s),\overline{X}(s)\right)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma^{ij}\left(s,\overline{\eta}(s),\overline{X}(s)\right) * dX_j(s), \\ \qquad\qquad i = 1,2,\dots,n,\end{cases} \qquad (9)$$
где $\overline{X}(t) = \big(X_1(t),\dots,X_d(t)\big)$ – вектор-функция, составляющие которой являются непрерывными функциями неограниченной вариации на любом отрезке из $[0,T]$.

Решением системы уравнений (9) будем называть набор функций вида $\eta_i(t) = \varphi_i\left(t,\overline{X}(t)\right)$, $t\in[0,T]$, $i = 1,2,\dots,n$, такой, что $\varphi_i(t,\overline{v})$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам и при подстановке функций $\varphi_i\left(t,\overline{X}(t)\right)$, $i=1,2,\dots,n$, в систему (9) все интегралы в правых частях уравнений системы имеют смысл, а сами уравнения обращаются в тождества.

Теорема 1. Для того чтобы функция $\overline{\varphi}\left(t,\overline{X}(t)\right)$, $t\in[0,T]$, $\overline{X}(t)\in R^d$, была решением задачи Коши (9), достаточно, чтобы $\overline{\varphi}\left(t,\overline{X}(t)\right)$ являлась решением конечной цепочки систем ОДУ (10)-(13):

$$\begin{cases}(\varphi_i)'_{v_1}\left(t,\overline{X}_{[1]}(t,v_1)\right)=\sigma^{i1}\left(t,\overline{\varphi}\left(t,\overline{X}_{[1]}(t,v_1)\right),\overline{X}_{[1]}(t,v_1)\right),\\ \qquad i=1,2,\dots,n,\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases}(\varphi_i)'_{v_k}\left(t,\overline{X}_{[k]}(t,v_k)\right)=\sigma^{ik}\left(t,\overline{\varphi}\left(t,\overline{X}_{[k]}(t,v_k)\right),\overline{X}_{[k]}(t,v_k)\right),\\ \qquad i=1,2,\dots,n,\end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}(\varphi_i)'_{v_d}\left(t,\overline{X}_{[d]}(t,v_d)\right)=\sigma^{id}\left(t,\overline{\varphi}\left(t,\overline{X}_{[d]}(t,v_d)\right),\overline{X}_{[d]}(t,v_d)\right),\\ \qquad i=1,2,\dots,n,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}(\varphi_i)'_t(t,\overline{v})|_{\overline{v}=\overline{X}(t)}=B^i\left(t,\overline{\varphi}\left(t,\overline{X}(t)\right),\overline{X}(t)\right),\\ \quad \varphi_i\left(0,\overline{X}(0)\right)=\eta_i^0,\quad i=1,2,\dots,n.\end{cases} \tag{13}$$

Вводятся дополнительные условия о локальной функциональной независимости функций $X_1(t),\dots,X_d(t)$, при которых данное утверждение обратимо.

Будем говорить, что непрерывные функции $X_1(s),\dots,X_d(s)$, имеющие неограниченную вариацию на любом конечном промежутке, *локально функционально зависимы* на отрезке $[t_1,t_2]$, если существует непрерывно дифференцируемая по всем своим аргументам функция $\Phi(s,\bar{v})=\Phi(s,v_1,\dots,v_d)$ такая, что $grad_{\bar{v}}\Phi(s,\bar{v})\neq 0$, $\bar{v}\in[\bar{X}(t_1),\bar{X}(t_2)]$, и $\Phi\left(s,X_1(s),\ \dots,X_d(s)\right)\equiv 0$ на некотором отрезке $[s_1,s_2]\subset[t_1,t_2]$, в противном случае функции $X_1(s),\dots,X_d(s)$ *локально функционально независимы*.

Построенный метод характеристик для решения дифференциальных уравнений в частных производных с многомерными симметричными интегралами обобщает результат Крылова Н.В., Розовского Б.Л. о связи стохастических дифференциальных уравнений Ито в частных производных и обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений Ито, при этом: (a) вместо многомерного винеровского процесса $\overline{W}(t)$ берется произвольная непрерывная функция неограниченной вариации $\overline{X}(t)$; (b) решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами уже не является диффузионным процессом, а сами многомерные симметричные интегралы являются обобщением стохастического интеграла Стратоновича.

Обозначим символом $\partial_t u(t,\bar{x})$ дифференциал по переменной t функции $u(t,\overline{x})$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом:

$$\partial_t u\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right) = -\sum_{i=1}^{n} B^i\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right) u'_{x_i}\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right) - dt - \tag{14}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right) u'_{x_i}\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right) * dX_j(t),$$
$$u\left(0,\overline{x},\overline{X}(0)\right) = x_k, \tag{15}$$
где x_k в начальном условии (15) – k-я координата переменной $\overline{x} \in R^n$.

Решением уравнения (14) будем называть функцию $u\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right)$ такую, что при подстановке функции$u\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right)$ в уравнение (14) все интегралы в правой части имеют смысл, а само это уравнение превращается в тождество.

Наряду с задачей (14)-(15) рассмотрим соответствующую систему обыкновенных уравнений с многомерными симметричными интегралами:
$$\begin{cases} d\eta_i(t,\overline{x}) = B^i\left(t,\overline{\eta}(t,\overline{x}),\overline{X}(t)\right) dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{ij}\left(t,\overline{\eta}(t,\overline{x}),\overline{X}(t)\right) * dX_j(t), \\ \eta_i(0,\overline{x}) = x_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \end{cases} \tag{16}$$
Теорема 2. Пусть непрерывные функции $X_1(s),\dots,X_d(s)$ имеют неограниченную вариацию на любом отрезке из $[0,T]$ и локально функционально независимы на отрезке $[0,T]$. Предположим, что функции $B^i\left(t,\overline{\eta}(t,\overline{x}),\overline{X}(t)\right)$, $\sigma^{ij}\left(t,\overline{\eta}(t,\overline{x}),\overline{X}(t)\right)$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,d$, непрерывны в Q (окрестности начальных значений системы (16)) и удовлетворяют в Q условию Липшица по η. Обозначим через $u_k(t,\overline{x}) = u_k\left(t,\overline{x},\overline{X}(t)\right)$ решения задачи Коши (14)-(15) для каждого начального условия x_k, $k = 1,2,\dots,n$, $\overline{U}(t,\overline{x}) = \left(u_1(t,\overline{x}),\dots,u_n(t,\overline{x})\right)$. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ отображение $\overline{U}(t,\cdot): \overline{x} \in R^n \to \overline{U}(t,\overline{x}) \in R^n$ является диффеоморфизмом класса $C^1(R^n)$, причем обратное отображение $\overline{U}^{-1}(t,\overline{x})$ является решением системы уравнений с многомерными симметричными интегралами (16).

Показывается, что справедливо одно из основных свойств характеристик, а именно, что произвольная достаточно гладкая функция от характеристик дифференциального уравнения в частных производных первого порядка является его решением.

В заключительной части данной главы определяется расширенный симметричный интеграл как обобщение симметричного интеграла на более широкий класс подынтегральных функций. Строится метод решения дифференциальных уравнений с расширенным симметричным интегралом.

Глава 3. Численно–аналитическое решение и моделирование исследуемых процессов

В главе 3 с помощью техники, предложенной в главе 2, строится численно-аналитическое решение задач, поставленных в главе 1.

При построении численных схем для решения уравнений используются алгоритмы из теории численных методов для решения дифференциальных уравнений, не содержащих стохастических интегралов и их детерминированных аналогов. Приводится обоснование устойчивости и сходимости используемых методов с помощью классических подходов.

Отметим, что правые части численных схем содержат ломаные, построенные по винеровским процессам. Известно, что эти ломаные с вероятностью 1 сходятся к траекториям винеровских процессов, а сами численные схемы с вероятностью 1 сходятся к точному решению заданных уравнений со скоростью $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. Отсюда сразу вытекает сходимость с вероятностью 1 сеточного решения к решению исходного уравнения.

Таким образом, предложенный численно-аналитический метод решения стохастических дифференциальных уравнений обладает следующими свойствами:

1. Уравнения, к которым сводятся исходные стохастические задачи, не содержат стохастических интегралов Ито и Стратоновича, что позволяет применять стандартные численные методы и алгоритмы.
2. Устойчивость численного решения с вероятностью 1. Ранее известные методы, как правило, обладают свойством устойчивости в гораздо более слабом, вероятностном смысле.
3. Сходимость численного решения с вероятностью 1. Ранее известные методы, как правило, могут гарантировать сходимость только в более слабых смыслах -- в среднеквадратическом ($L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $p \geq 1$) или по вероятности.
4. К некоторым возможным недостаткам следует отнести предварительную аналитическую работу, связанную с переходом от уравнений с симметричными интегралами к уравнениям без них.

Моделирование решений рассматриваемых задач в данной работе происходит по алгоритму, представленному на рисунке 1.

Глава 4. Характеристика разработанного программного комплекса моделирования решений поставленных задач

В главе 4 представлено описание разработанной программы для решения поставленных задач, приведены скриншоты и принципы работы с программой.

Разработка программного комплекса для решения поставленных задач проводилась в Delphi XE - интегрированной среде разработки ПО для Microsoft Windows на языке Delphi (Object Pascal), разработанной в соответствии с концепцией визуального программирования.

Программа состоит из нескольких процедур и функций генерации винеровских процессов и расчета моделей колебательных процессов. Параметры исследуемых моделей вводятся посредством пользовательского интерфейса. К числу настраиваемых параметров относятся:

- длина и количество шагов разбиения расчетной сетки;

- тип граничных условий (первого или второго рода);
- вид начальных и граничных условий (несколько предустановленных функций на выбор плюс возможность подгрузки пользовательских функций из файлов данных);
- интенсивность воздействия внешних сил;
- значения коэффициентов уравнения.

На выходе программы получаются численные решения уравнений и их визуализация в виде динамической прорисовки графиков по времени.

Рисунок 1: Алгоритм моделирования решений рассматриваемых задач

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработан новый метод численно-аналитического потраекторного решения гиперболических уравнений с многомерным пространственно-временным шумом, отличающийся тем, что стохастическое дифференциальное уравнение в рассматриваемой модели сведено к уравнению без стохастических интегралов, решение которого найдено с помощью стандартных численных схем и реализовано в разработанном программном комплексе с визуализацией результатов вычислений.

2. Разработан новый метод численно-аналитического решения и моделирования колебательных процессов, в которых внешнее воздействие представляет собой шум, сконцентрированный на гиперплоскости. Полученное численное решение реализовано в разработанном программном комплексе с визуализацией результатов вычислений.

3. Предложены новые аналитические методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с многомерными симметричными интегралами и дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с многомерным симметричным интегралом, которые являются обобщением метода характеристик для решения классических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. О классической формуле Ито для обобщенных итовских интегралов / Е.В. Гапечкина (Юрьева), Ф.С. Насыров// Вестник УГАТУ: Научный журнал Уфимского государственного авиационного технического университета, 2006. Т.8, №2(18).С.126-130.

2. Об обобщении одного результата Н.В. Крылова / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009. Т.16, №2. С.257.

3. О гиперболических уравнениях с шумом, сконцентрированным на гиперплоскости / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Вестник УГАТУ: Научный журнал Уфимского государственного авиационного технического университета, 2011. Т.15, №2(42). С.59-67.

В других изданиях

4. О стохастических дифференциальных уравнениях с расширенным симметричным интегралом / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Труды XXVII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: издательство МГУ, 2005. С.22-23.

5. Об аналогах стохастических дифференциальных уравнений с расширенным симметричным интегралом / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Сборник тезисов XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". М.: издательство МГУ, 2006. С.69-70.

6. Об одном варианте формулы Ито / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Сборник трудов участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова Ростов-на-Дону. Ростов-на-дону: издательство РГУ, 2006. С.224-226.

7. Обобщенная формула Ито и стохастические интегралы по локальному времени/ Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Материалы докладов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". М.: Издательский центр Факультета журналистики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007, 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.

8. Об обобщении одного результата Крылова Н.В., Розовского Б.Л. / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова 9-15 сентября 2008 г. Ростов-на-Дону, 2008. С.211-212.

9. О стохастических гиперболических уравнениях с шумом, сконцентрированным на гиперплоскости / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". М.: МАКС Пресс, 2009, 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см.

10. Метод характеристик для детерминированных аналогов стохастических дифференциальных уравнений / Е.В. Гапечкина (Юрьева) // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2011" / Отв. ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. [Электронный ресурс] - М.: МАКС Пресс, 2011.- 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см.

Соискатель ___________________________ Е.В. Юрьева

ЮРЬЕВА Екатерина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ШУМА

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать17.11.2011. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр.-отт 1,0. Уч.-изд.л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ №375

ФГБОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12