

*На правах рукописи*

**ГАРИФУЛЛИНА Светлана Ринатовна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРОТЯЖЕННЫХ ЭЛЕКТРОДОВ  
В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**

**Уфа – 2011**

Работа выполнена на кафедре информационных технологий  
Федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего профессионального образования  
«Башкирский государственный университет»

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, доцент  
**Болотнов Анатолий Миронович**

Официальные оппоненты: д-р физ.-мат. наук, профессор  
**Быков Валерий Иванович**  
Московская академия  
предпринимательства  
при Правительстве Москвы

д-р физ.-мат. наук, профессор  
**Кризский Владимир Николаевич**  
Стерлитамакская государственная  
педагогическая академия  
им. З. Бишевой

Ведущая организация: **Московский государственный  
университет им. М.В. Ломоносова**  
(факультет вычислительной  
математики и кибернетики)

Защита состоится « 11 » ноября 2011 г. в 10.00 часов на засе-  
дании диссертационного совета Д-212.288.06 при Уфимском госу-  
дарственном авиационном техническом университете по адресу:  
450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уфимско-  
го государственного авиационного технического университета.

Автореферат разослан « 5 » октября 2011 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д.ф.-м.н., профессор

Г.Т. Булгакова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Научный интерес к теоретическому и экспериментальному исследованию потенциальных физических полей обусловлен тем, что к настоящему времени накоплен огромный фактический материал, а также существует большая потребность в решении таких практически важных задач, как электроосаждение и растворение металлов, коррозия и электрохимическая защита металлов от коррозии, совершенствование технологии цветной металлургии и т.д. Любой электрохимический процесс сопровождается прохождением электрического тока в системе, состоящей из электродов, изоляторов и электролита с различными удельными электропроводимостями. Распределение тока и потенциала оказывает существенное влияние на протекание электродных процессов и на технологические параметры, а вместе и на все основные технико-экономические показатели работы предприятий электрохимической промышленности. Токораспределение в коррозионных системах определяет эффективность действия электрохимической защиты металлических сооружений от коррозии. Решение задач качественной и количественной модернизации технологических процессов невозможно без систематического исследования распределения потенциальных физических полей в электрохимических системах. В связи с этим важное значение приобретают вопросы создания и совершенствования математических моделей, алгоритмов, программ расчета и анализа физических полей с учетом основных геометрических и электрохимических параметров процесса.

Математические модели потенциальных полей представляют собой краевые задачи с граничными условиями смешанного вида для уравнений эллиптического типа в двумерных и трехмерных, замкнутых и неограниченных неодносвязных областях. При математическом моделировании указанных задач необходимо не разовое решение, получающееся в ходе численных экспериментов, а построение функций потенциала и плотности тока на границах областей в зависимости от параметров в краевых условиях, сопровождаемое поиском геометрических характеристик областей, при которых распределение электрического поля удовлетворяет заданным условиям. Для построения численных алгоритмов, реализованные в данной работе, использовались математические методы: граничных интегральных уравнений, фиктивных источников, зеркальных отображений, дифференциально-разностной метод, принцип математических аналогий потенциальных полей.

С методической точки зрения актуальна разработка систем программно-математического обеспечения моделирования указанных процессов и параметрического анализа соответствующих математи-

ческих моделей. Численное моделирование является эффективным методом исследования, поскольку позволяет учесть особенности изучаемых полей и на основании численных результатов восстановить картину моделируемого процесса, которая недоступна для непосредственного наблюдения.

Теоретические и методические основы применения математических методов к решению задач расчета электрических полей заложены в работах В.Н. Остапенко, Н.П. Гнусина, Ю.А. Иоссея, В.Т. Иванова, и получили свое дальнейшее развитие в исследованиях Глазова Н.П., Житникова В.П., Кайдрикова Р.А., Кошева А.Н., Кризского В.Н., Макарова В.А., Рудого В.М. и др.

**Цель работы** – математическое моделирование, численное исследование потенциальных электрических полей протяженных проводников в полуограниченном пространстве и создание комплекса программ для их расчета.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**.

1. Развитие методов математического моделирования физических полей в полуограниченном пространстве с протяженными неоднородностями.
2. Разработка алгоритмов численного решения краевых задач теории потенциала со смешанными граничными условиями в незамкнутых областях.
3. Создание программного комплекса для расчета потенциальных электрических полей на основе предложенных алгоритмов.

**Методы исследования.** Сформулированные в работе математические модели основаны на фундаментальных законах теоретической физики, на теории уравнений математической физики, теории численных методов с использованием дифференциально-разностного метода, методах граничных интегральных уравнений и фиктивных источников. При решении задач использовались труды отечественных и зарубежных ученых, посвященные проблемам математического моделирования потенциальных физических полей.

### Научная новизна.

1. Предложены методы математического моделирования электрических полей систем протяженных проводников в проводящем полупространстве с учетом изменения потенциала в проводниках и неоднородности изоляции. Впервые для задач рассматриваемого класса разработана математическая модель на основе метода фиктивных источников, позволяющая в реальном времени проводить расчеты физических полей протяженных проводников, длина которых может достигать сотен километров.
2. Разработаны алгоритмы численного решения поставленных задач на основе метода граничных интегральных уравнений, дифференци-

ально-разностного метода (метода плоскостей) и метода фиктивных источников, предложенного и апробированного для задач данного класса впервые.

3. На основе предложенных алгоритмов разработан комплекс программ в среде программирования Delphi (Lasarus) для численного исследования потенциальных полей протяженных проводников в случаях: а) двумерная задача в сечении, нормальном к продольной оси проводников; б) трехмерная задача для параллельных проводников одинаковой длины; в) трехмерная задача для произвольного количества проводников различной длины, расположенных относительно друг друга произвольным образом.

**Практическая значимость работы.** Предложенные модели, алгоритмы и программы позволяют рассчитать распределение потенциала и плотности тока катодной защиты трубопроводов и обсадных колонн скважин с заданными параметрами, а также выработать рекомендации по условиям катодной защиты в различных условиях эксплуатации.

Результаты работы используются в научных исследованиях Всероссийского научно-исследовательского института по строительству и эксплуатации трубопроводов, объектов ТЭК, г. Москва (отзыв лаборатории технологии и технических средств электрохимической защиты ОАО «ВНИИСТ» прилагается). Комплекс программ зарегистрирован, свидетельство о регистрации электронного ресурса № 17028 от 26.04.2011.

#### **Основные научные результаты, выносимые на защиту**

1. Математическая модель электрического поля системы протяженных проводников в проводящем полупространстве на основе метода фиктивных источников.
2. Алгоритмы численного решения двумерных и трехмерных краевых задач на основе метода граничных интегральных уравнений, дифференциально-разностного метода (метода плоскостей) и метода фиктивных источников.
3. Комплекс программ, разработанный в средах Delphi и Lasarus для численного исследования потенциальных полей протяженных проводников в двумерных и трехмерных постановках.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации были представлены и обсуждались на научных семинарах и конференциях, соответствующих профилю диссертации. Были сделаны доклады на: 1) региональной shk.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике (Уфа, 2003, 2004); 2) международной уфимской зимней shk.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых (Уфа, 2005); 3) научно-исследовательской стажировке молодых ученых «Современные информационные и компьютерные тех-

нологии в инженерно-научных исследованиях» (Уфа, 2006); 4) XLV международной научной студенческой конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2007); 5) 38-й региональной молодежной конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2007); 6) уфимской международной математической конф., посвященной памяти А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2007); 7) I всероссийской научно-практической конф. «Перспективы развития информационных технологий» (Новосибирск, 2008); 8) межрегиональной научно-технической конф. «Актуальные проблемы естественных и технических наук», посвященной памяти проф. К.А. Валеева (Уфа, 2009); 9) семинарах Башкирского гос. университета, Института математики с вычислительным центром УНЦ РАН и Уфимского гос. авиационного технического университета.

**Публикации.** По результатам исследований опубликована 21 печатная работа, из них – 13 статей (в том числе 3 – в журналах из списка ВАК), 7 материалов конференций, одно свидетельство о регистрации разработки программного продукта.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 152 наименований. Общий объем диссертации составляет 193 страницы, в том числе 60 рисунков, 30 таблиц и 2 приложения.

#### **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

**Во введении** обосновывается актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, приведены положения, выносимые на защиту, отмечена научная новизна и практическая значимость, приведены сведения об апробации работы.

**Первая глава** носит обзорный характер. В § 1.1 анализируется влияние почвы на процессы коррозии металлов. В § 1.2 представлено теоретическое описание явлений электрического поля. § 1.3 посвящен изложению уравнений теории разбавленных растворов, общих закономерностей, используемых при математическом моделировании полей электрохимической защиты от коррозии металлических аппаратов и сооружений. В § 1.4 представлен обзор методов расчета электрических полей. В § 1.5 описаны методы расчета электрических полей, изложены основные схемы сведения краевых задач к граничным интегральным уравнениям, проводится анализ разностных методов с точки зрения их способа применения, численной реализации и эффективности при решении задач моделирования. В § 1.6 сформулирована в общем виде математическая модель электрического поля в трехмерной электрохимической системе и различные типы краевых условий на границах рассматриваемых областей в зависимости от

степени учета электрохимических процессов, протекающих на границах электродов.

**Во второй главе** исследуется двумерная краевая задача электрических полей катодной защиты подземного трубопровода протяженным анодом и разрабатывается численный метод ее расчета. В § 2.1 приводится постановка задачи. Рассматривается задача распределения потенциала и плотности тока электрического поля в системе катодной защиты трубопровода протяженным анодом, проложенным в грунте параллельно трубе в сечении  $\Omega$  (рисунок 1а). Граница области решения задачи  $\Omega$ :  $S_e = S_i \cup S_t \cup S_a$ , где  $S_i$  – граница земли (ось абсцисс),  $S_e, e = a, t$  – границы проводников. Для замкнутости области решения задачи  $\Omega$  проведена искусственно образованная граница  $S_0$ , играющая роль изолятора.

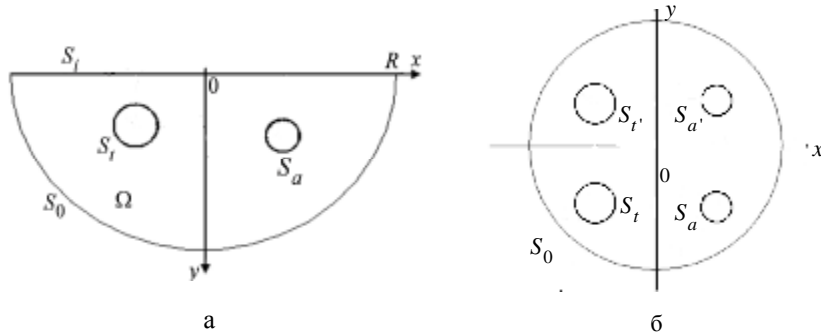


Рисунок 1 а – схема катодной защиты трубопровода:  $\Omega$  – область решения задачи.  
Рисунок 1 б – модифицированная область решения задачи.

Требуется найти распределения потенциала и плотности тока в заданной области  $\Omega$ . Потенциал стационарного электрического поля при отсутствии точечных источников и при постоянной электропроводности грунта удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta^2 U(p) / \partial x^2 + \Delta^2 U(p) / \partial y^2 = 0, \quad p = (x, y) \in \Omega. \quad (1)$$

На границах задаются условия:

$$(U + s c_e \partial U / \partial n^{\mathbf{r}}) \Big|_{S_e} = u_e, \quad e = a, t, \quad (2)$$

где  $U$  – потенциал электрического поля, В,  $s$  – удельная электропроводность грунта,  $(\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ ,  $c_e$  – удельные поляризуемости проводников,  $\text{Ом} \cdot \text{м}^2$ ,  $u_e$  – потенциалы металлов проводников, В.

На границах земли  $S_i$  и  $S_0$  ставятся условия второго рода

$$\partial U / \partial n^{\mathbf{r}} \Big|_{S_i, S_0} = 0. \quad (3)$$

В § 2.2 разрабатывается алгоритм решения задачи (1) – (3). На основе интегральной формулы Грина строится линейное граничное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$pU(p) + \int_{S_e} U(q) K(p, q) dq = \int_{S_e} F(p, q) dq, \quad (4)$$

где  $K(p, q)$  – ядро с логарифмической особенностью в точке  $q = p$ ,

$$K(p, q) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R(p, q)}, & q \in S_i, S_0; \\ \frac{1}{s c_e} \ln \frac{1}{R(p, q)} + \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R(p, q)}, & q \in S_e \end{cases}$$

$$F(p, q) = \begin{cases} 0, & q \in S_i, S_0; \\ u_e / s c_e \ln \frac{1}{R(p, q)}, & q \in S_e \end{cases}, \quad e = a, t.$$

В § 2.3 рассматривается модификация алгоритма решения. Метод «зеркальных отображений» сводит исходную задачу (1) – (3) к определению электрического поля для данных электродов с границами  $S_t$  и  $S_a$ , а также их «зеркальных» образов с границами  $S_t'$  и  $S_a'$ , соответственно относительно границы раздела сред. Решение задачи продолжается в область, симметричную относительно оси  $Ox$ , т.е.  $U(x, y) = U(x, -y)$ . Это возможно ввиду четности условия (3). Граничные условия на  $S_t'$  и  $S_a'$  совпадают с (2) соответственно. Граница области решения задачи  $\Omega$  представляется в виде:  $S_e = S_0 \cup S_t \cup S_a \cup S_t' \cup S_a'$  (рисунок 1 б). Распределение потенциала в заданной области  $\Omega$  описывается уравнением Лапласа (1) с граничными условиями

$$(U + s c_e \partial U / \partial n^{\mathbf{r}}) \Big|_{S_e, S_e'} = u_e, \quad e = a, t, \quad e' = a', t', \quad (5)$$

$$\partial U / \partial n^{\mathbf{r}} \Big|_{S_0} = 0. \quad (6)$$

На основе интегральной формулы Грина строится линейное граничное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$pU(p) + \int_{S_e^{\%}} U(q) K_1(p, q) dq = \int_{S_e^{\%}} F_1(p, q) dq, \quad (7)$$

где  $S_e^{\%} = S_e \cap \{y \leq 0\}$ ,  $K_1(p, q) = K(p, q) + K(p, q')$ ,  $F_1(p, q) = F(p, q) + F(p, q')$ , а  $q' = (x_q, -y_q)$  – точка, симметричная точке  $q$  относительно  $y = 0$ .

С учетом чётности решения относительно  $y = 0$  интегралы по границам в верхней полуплоскости пропадают за счёт изменения ядра уравнения.

Единственность решения для внешней задачи (1), (5), (6) достигается в двумерном случае при стремлении функции потенциала  $U(x, y)$  к конечному пределу на бесконечности, т.е. при

$$U|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = \text{const} = a. \quad (8)$$

Требуется найти распределения потенциала и плотности тока в области  $\Omega$ , если на границах  $S_e = S_t \cup S_{t'} \cup S_a \cup S_{a'}$  выполняются граничные условия третьего рода (5), а также существует дополнительное условие на решение (8).

Задача (1), (5), (8) сводится к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} pU^*(p) + \int_{S_e} U^*(q)K_1(p, q)dq + a \int_{S_e} \frac{1}{Sc_e} \left[ \ln \frac{1}{R(p, q)} + \ln \frac{1}{R(P_\infty, q)} \right] dq = \int_{S_e} F_1(p, q)dq, \\ \int_{S_e} U^*(q)K_1(P_\infty, q)dq + a \int_{S_e} \frac{1}{Sc_e} \left[ \ln \frac{1}{R(p, q)} + \ln \frac{1}{R(P_\infty, q)} \right] dq = \int_{S_e} F_1(P_\infty, q)dq, \end{cases} \quad (9)$$

где  $e = t, a$ ,  $P_\infty$  – удаленная точка,  $K_1$  и  $F_1$  аналогично в (7),  $U^* = U - a$ .

За счет введения одной неизвестной константы  $a$  отпадает необходимость во внешней искусственной границе  $S_0$ . Существенно уменьшается размерность СЛАУ, что либо сказывается на времени счета, либо при той же размерности системы может быть достигнута большая точность решения.

В § 2.4 описывается численное решение уравнения Фредгольма второго рода. Для решения граничных интегральных уравнений используется метод конечных сумм. В результате получается СЛАУ с хорошо обусловленной матрицей, которая решается методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцам.

В § 2.5 на основе предложенных схем реализован и апробирован алгоритм расчета электрического поля катодной защиты при решении тестовых и реальных задач. Результаты тестовых расчетов подтверждают эффективность предложенного алгоритма: относительная погрешность решения на границах области не превышает:  $|(U(p) - \hat{U}(p)) / \hat{U}(p)| \leq 3 \cdot 10^{-5}$ .

В результате решений задачи на основе реальных параметров установлено, что равномерность катодного токораспределения улучшается при увеличении расстояния между проводниками, увеличении сопротивления изоляции трубы и снижении удельной электропроводности грунта.

В третьей главе рассматривается дифференциально-разностный алгоритм расчета электрического поля параллельных протяженных электродов одинаковой длины в трехмерной области. В § 3.1 приводится постановка задачи катодной защиты подземного трубопровода протяженным анодом, проложенным в грунте параллельно трубе.

Распределение потенциала электрического поля для такой модели в области

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in (0, H) : (x - x_t)^2 + (y - y_t)^2 > R_t^2, (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 > R_a^2, y < 0\}$$

описывается краевой задачей

$$\partial^2 U(p) / \partial x^2 + \partial^2 U(p) / \partial y^2 + \partial^2 U(p) / \partial z^2 = 0, \quad p = (x, y, z) \in \Omega, \quad (10)$$

$$(U(p) + Sc_e \partial U(p) / \partial \mathbf{n})|_{S_e} = u_e, \quad e = a, t, \quad (11)$$

$$\partial U(p) / \partial \mathbf{n}|_S = 0, \quad (12)$$

$$U(p) \rightarrow 0, \quad \text{при } p(x, y, z) \rightarrow \infty, \quad (13)$$

и с условиями на плоскостях  $z = 0$ ,  $z = H$

$$\partial U / \partial z|_{z=0} = 0, \quad (u + a \partial U / \partial z)|_{z=H} = 0. \quad (14)$$

В связи с периодичностью и симметричностью решения относительно плоскостей  $z = 0$  и  $z = H$  распределение потенциала в области

$\Omega = \{(x, y, z) : z \in (0, H) : (x - x_t)^2 + (y \pm y_t)^2 > R_t^2, (x - x_a)^2 + (y \pm y_a)^2 > R_a^2\}$  описывается уравнением (10) с граничными условиями (13) – (14) и

$$(U(p) + Sc_e \partial U(p) / \partial \mathbf{n})|_{S_e, S_e'} = u_e, \quad e = a, t. \quad (15)$$

В § 3.2 разработан алгоритм решения задачи (9), (13) – (15) в области  $\Omega$  дифференциально-разностным методом (метод плоскостей). Рассматриваемая область разбивается  $(m-1)$  плоскостями с постоянным шагом  $h$ :  $z_i = ih, i = 1, m-1, h = H / m$ . Воспользовавшись аппроксимацией производной второго порядка по  $z$  в (10) и (14), получим дифференциально-разностную схему

$$\Delta U - TU = 0, \quad (16)$$

с граничными условиями

$$\left( \mathbf{U} + s c_e \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{S_e, S_e'} = \mathbf{y}_e, \quad e = a, t \quad (17)$$

где  $\mathbf{U}(x, y) = (\mathbf{U}_0(x, y), \mathbf{U}_1(x, y), \dots, \mathbf{U}_m(x, y))^T$  – неизвестная вектор-функция,  $T$  – матрица  $(m+1)$  порядка вида

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \frac{-1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-2}{h^2} & \frac{2}{h} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{h} \right) \end{pmatrix}.$$

Для построения решения перейдем к собственным векторам матрицы  $T$ , получим систему независимых двумерных краевых задач

$$\Delta \mathbf{W} - \Lambda \mathbf{W} = 0, \quad (18)$$

$$\left( \mathbf{W} + s c_e \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{S_e, S_e'} = \mathbf{\Psi}_e, \quad e = a, t. \quad (19)$$

Пользуясь формулой Грина для уравнения Пуассона

$$2pW_i(p) = \iint_{\Omega_1} K_0(z) F_i(q) d\Omega_1 + \int_{S_e'} \left( W_i(q) \frac{\partial K_0(z)}{\partial \mathbf{n}_q} - K_0(z) \frac{\partial W_i(q)}{\partial \mathbf{n}_q} \right) dq, \quad (20)$$

где  $z = \sqrt{I_i} |p - q|$ ,  $S_e' = S_a' \cup S_t' \cup S_a'' \cup S_t''$ ;  $S_t'$  и  $S_a'$  – образы границ трубы и анода, расположенные в верхнем полупространстве,  $K_0(z)$  – функция Макдональда,  $\Omega_1 = \Omega \cap \{z = \text{const}\}$ . Уравнения (19) – (20) сводятся к уравнению Фредгольма второго рода.

В § 3.3 обоснован метод плоскостей на основе энергетических оценок решений в метриках пространств  $L_2$  и  $W_2^1$ . Доказана теорема о сходимости и оценки точности в нормах  $L_2(\Omega_z \times \bar{w})$  и  $W_2^1(\Omega_z \times \bar{w})$  в

ограниченной области  $\Omega_R = \Omega \cap \{x^2 + y^2 < R^2\}$ , где  $R$  – некоторая большая положительная постоянная,  $\Omega_z = \Omega \cap \{z = \text{const}\}$ ,

$\bar{w} = \{z = z_i, i = \overline{1, m-1}\}$ . Показано, что  $u \rightarrow U$  при  $R \rightarrow \infty$ .

В § 3.4 на основе предложенной схемы реализован и апробирован алгоритм расчета электрического поля катодной защиты при решении тестовых и реальных задач. В ходе решения модельных задач получены значения относительной погрешности на границах:

$$\left| (U(p) - \mathcal{U}(p)) / \mathcal{U}(p) \right| \leq 8 \cdot 10^{-4}.$$

Проведены расчеты электрического поля на основе реальных данных.

**В четвертой главе** рассматривается математическая модель электрического поля в системе протяженных электродов переменной длины.

В § 4.1 приводится постановка задачи распределения электрического поля в системе катодной защиты участка подземного трубопровода длиной  $2L_t$  протяженным гибким анодом длиной  $2L_a$  (рисунок 2).

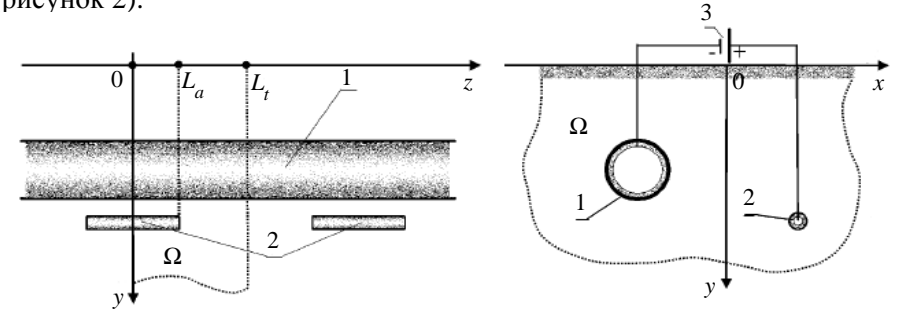


Рисунок 2 – схема катодной защиты трубопровода:  $\Omega$  – область решения задачи,  $L_a$  – половина длины анода, 1 – труба, 2 – протяженный гибкий анод, 3 – катодная станция.

Распределение электрического поля для такой модели в области  $\Omega = \{p : p = (x, y, z), z \in [0, L_t], x \in (-\infty, \infty), y \in [0, \infty)\}$  описывается уравнением Лапласа (10). На границах задаются условия

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = 0, \quad (21)$$

$$\left( U + c_a \sigma \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{S_a} = u_a, \quad \left( U - c_t \sigma \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{S_t} = u_t. \quad (22)$$

Здесь  $S_i$  – изолированные границы (свободная поверхность земли,

плоскости симметрии в грунте, т.е. нормальные к оси  $z$  сечениям при  $z=0$  и  $z=L_t$  и на торцевых сечениях анода и трубы),  $S_a$  и  $S_t$  – боковые границы («анод – грунт» и «грунт – труба»). Заданной величиной в задаче является ток  $I_0$  в цепи «катодная станция – анод – грунт – труба». Сечениям анода и трубы при  $z=0$  соответствуют условия второго рода

$$du_a/dz|_{z=0} = -I_0/2\sigma_a S_a^*, \quad du_t/dz|_{z=0} = I_0/2\sigma_t S_t^*, \quad (23)$$

где  $I_0$  – ток катодной станции, А;  $\sigma_a$ ,  $\sigma_t$  – электропроводности металлов анода и трубы;  $S_a^*$ ,  $S_t^*$  – площади их «металлических» сечений (без учета площади изоляции и полости трубы), м<sup>2</sup>.

Для потенциалов  $u_a(z)$ ,  $u_t(z)$  и плотностей тока  $j_a(z)$ ,  $j_t(z)$  в металле анода и трубы в продольном направлении потребуем выполнения закона Ома

$$j_a(z) = -\sigma_a du_a/dz; \quad j_t(z) = \sigma_t du_t/dz \quad (24)$$

где  $j_a(z)$ ,  $j_t(z)$  – плотности продольных токов в сердечнике анода и в металле трубы, А/м<sup>2</sup>.

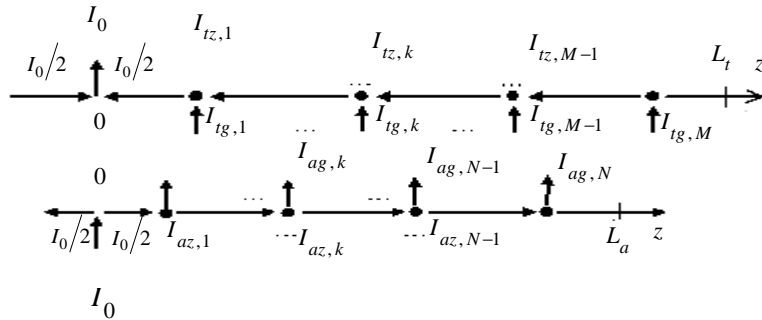


Рисунок 3 – дискретная модель токораспределения.

В § 4.2 предложен и разработан алгоритм решения задачи (10), (21) – (24) методом фиктивных источников. Анод представлен в виде  $N$  конечных объемных элементов (КОЭ) длины  $L_a/N$ . С геометрическим центром КОЭ ассоциирован точечный фиктивный источник (ФИ) или сток. Каждый КОЭ характеризуется средними значениями неизвестных величин: потенциал в металле, потенциал в грунте, продольный ток в сердечнике анода, и ток, вытекающий из боковой поверхности анода в грунт. Аналогично для трубы введем

$M$  КОЭ. Схема токов для предложенной модели представлена на рисунке 3. Индекс  $k$  соответствует номеру ФИ. Применяв первый закон Кирхгофа к каждому ФИ анода и трубы, получим

$$I_0/2 - I_{az,1} - I_{ag,1} = 0, \quad I_{az,N-1} - I_{ag,N} = 0, \quad (25)$$

$$I_{az,n} - I_{az,n+1} - I_{ag,n+1} = 0, \quad n = 1, \dots, N-2,$$

$$I_0/2 - I_{tz,1} - I_{tg,1} = 0, \quad I_{tz,M-1} - I_{tg,M} = 0, \quad (26)$$

$$I_{tz,m} - I_{tz,m+1} - I_{tg,m+1} = 0, \quad m = 1, \dots, M-2,$$

где  $I_{az,n}$  – ток, текущий в сердечнике анода вдоль оси  $z$  от  $n-1$ -го ФИ к  $n$ -му,  $I_{ag,n}$  – ток, вытекающий в грунт через боковую поверхность  $n$ -го КОЭ,  $I_{tz,m}$  – ток, текущий в металле трубы вдоль оси  $z$  от  $m+1$ -го ФИ к  $m$ -му,  $I_{tg,m}$  – ток, втекающий из грунта в трубу через боковую поверхность  $m$ -го КОЭ трубы. Здесь в первых и третьих уравнениях системы (25) – (26) используются условия (23).

Из граничных условий (22) получим

$$U_{ag,n} + c_a I_{ag,n}/S_{a,n} = U_{am,n}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (27)$$

$$U_{tg,m} - c_t I_{tg,m}/S_{t,m} = U_{tm,m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (28)$$

где  $U_{am,n}$  – потенциал металла  $n$ -го КОЭ анода,  $U_{ag,n}$  – потенциал грунта на границе с  $n$ -м КОЭ анода,  $I_{ag,n}$  – ток, вытекающий из боковой поверхности  $n$ -го КОЭ анода в грунт,  $S_{a,n}$  – площадь боковой поверхности  $n$ -го КОЭ анода. Индекс  $n$  соответствует номеру КОЭ,  $U_{tm,m}$  – потенциал металла  $m$ -го КОЭ трубы,  $U_{tg,m}$  – потенциал грунта на границе с  $m$ -м КОЭ трубы,  $I_{tg,m}$  – ток, втекающий в трубу через боковую поверхность  $m$ -го КОЭ,  $S_{t,m}$  – площадь боковой поверхности  $m$ -го КОЭ трубы.

Реализуя условие (24), получим соотношения для токов вдоль оси  $z$  и потенциалов металла между соседними ФИ:

$$U_{am,n} - U_{am,n+1} = R_a^* I_{az,n}; \quad n = 1, N-1, \quad U_{tm,m+1} - U_{tm,m} = R_t^* I_{tz,m}; \quad m = 1, M-1, \quad (29)$$

где  $R_a^*$ ,  $R_t^*$  – продольные сопротивления сердечника анода и металла трубы, Ом/м. Здесь неизвестными являются  $U_{am,n}$ ,  $U_{tm,m}$  и  $I_{az,n}$ ,  $I_{tz,m}$ .

Потенциал в грунте на границе с анодом и трубой определяется из условий

$$4\pi\sigma U_{ag}(p_n) = \sum_{k=1}^N I_{ag}(p_k) / R(p_n, p_k) - \sum_{l=1}^M I_{tg}(p_l) / R(p_n, p_l), \quad n = 1, \dots, N \quad (30)$$

$$4\pi\sigma U_{tg}(p_m) = \sum_{k=1}^N I_{ag}(p_k) / R(p_m, p_k) - \sum_{l=1}^M I_{tg}(p_l) / R(p_m, p_l), \quad m = 1, \dots, M, \quad (31)$$

где  $R(p_n, p_k)$  – расстояние от точки  $p_n$ , в которой определяется потенциал, до точки  $p_k$ , в которой находится ФИ. Здесь неизвестными являются  $U_{ag,n}$ ,  $I_{ag,k}$ ,  $U_{tg,m}$  и  $I_{tg,k}$ . Таким образом, получена СЛАУ (25) – (31), в которой число уравнений и число неизвестных равно  $4(N + M) - 2$ .

В § 4.3 изложенный алгоритм апробирован при решении реальных задач расчета в системах катодной защиты трубопровода протяженным гибким анодом и обсадных колонн скважины удаленным вертикальным анодом. Предложенная модель применима не только в случае для параллельных проводников с постоянной в сечении геометрией, но и в более общих случаях: при произвольном взаимном расположении протяженных проводников в проводящей среде, а также в случае зависимости параметров проводников от продольной координаты.

**В пятой главе** описан комплекс программ «расчет электрических полей протяженных проводников в полупространстве», который предназначен для численного исследования полей протяженных проводников: двумерная задача в сечении, нормальном к оси проводников (program 2d), трехмерная задача для параллельных проводников одинаковой длины (program 3d) и трехмерной задача для произвольных проводников (program MFI). Приведены описания, блок-схемы программных модулей и их коды. Комплекс программ позволяет в полном объеме решать задачи, не прибегая к стандартным пакетам. В то же время, комплекс может быть адаптирован для решения подобных задач в других прикладных областях.

### Основные результаты работы

1. В диссертации предложены методы математического моделирования электрических полей протяженных проводников в полупространстве с учетом изменения потенциала в металлических проводниках и с учетом неоднородности их изоляции. Впервые для рассматриваемых задач предложена математическая модель на основе метода фиктивных источников, позволяющая в реальном времени проводить расчеты физических полей протяженных проводников, длина которых может достигать десятков и сотен километров.
2. Разработаны и программно реализованы алгоритмы численного решения поставленных задач на основе метода граничных интегральных уравнений, дифференциально-разностного метода (метода плоскостей) и предложенного метода фиктивных источников.
3. В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено, что комплекс программ позволяет осуществлять расчеты реальных физических полей в полупространстве, в частности, электрических полей катодной защиты. На основании проведенных расчетов проводилась оптимизация параметров катодной защиты магистрального трубопровода «Восточная Сибирь – Тихий океан».

### Публикации по теме диссертации в изданиях из перечня ВАК

1. **Гарифуллина С.Р.** Алгоритм расчета электрического поля катодной защиты трубопровода методом фиктивных источников / А.М. Болотнов, Н.Н. Глазов, С.Р. Гарифуллина // Системы управления и информационные технологии. 2008. № 2 (32). С. 60 – 64.
2. **Гарифуллина С.Р.** Компьютерное моделирование электрических полей в системах катодной защиты трубопроводов / А.М. Болотнов, С.Р. Гарифуллина, Н.Н. Глазов, Н.П. Глазов, М.А. Башаев // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2009. № 5. С. 27 – 32.
3. **Гарифуллина С.Р.** Математическое моделирование электрических полей катодной защиты подземного трубопровода протяженным анодом / С.Р. Гарифуллина // Вестник Башкирского университета. Уфа. БашГУ. 2010. Т. 15. №3. С. 561 – 563.

### Публикации в других изданиях

4. **Кильдибекова С.Р. (Гарифуллина С.Р.)** Расчеты электрических полей катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Кильдибекова (С.Р. Гарифуллина) // Рег. шк. – конф. для студ., аспирантов и молодых ученых по математике и физике: мат. конф. Уфа: РИО БашГУ. 2003. С. 39.
5. **Кильдибекова С.Р. (Гарифуллина С.Р.)** Расчеты электрических полей катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Кильдибекова (С.Р. Гарифуллина) // Рег. шк. – конф. для студ., аспирантов и молодых ученых по математике и физике: сб. тр. Уфа: РИО БашГУ. 2003. Т.1. С. 113 – 120.



6. **Гарифуллина С.Р.** Численное моделирование электрического поля катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Гарифуллина // IV рег. шк. – конф. для студ., аспирантов и мол. уч. по математике и физике, посвященные 95-летию БашГУ: мат. конф. Уфа: РИО БашГУ. 2004. С. 25.
7. **Гарифуллина С.Р.** Численное моделирование электрического поля катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Гарифуллина // Рег. шк. – конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: сб. тр. Уфа: РИЦ БашГУ. 2004. Т.1. С. 55 – 63.
8. **Гарифуллина С.Р.** Влияние геометрических и электрохимических параметров на распределение потенциала электрического поля катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Гарифуллина // V рег. шк. – конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: мат. конф. Уфа: РИО БашГУ. 2005. С. 31.
9. **Гарифуллина С.Р.** Исследование электрического поля катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Гарифуллина // Междунар. уфимской зимней шк. – конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых: мат. конф. Уфа: РИО БашГУ. 2005. С. 81.
10. **Гарифуллина С.Р.** Исследование электрического поля катодной защиты магистральных трубопроводов / С.Р. Гарифуллина // Междунар. уфимской зимней шк. – конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых: сб. трудов. Уфа: РИО БашГУ. 2005. Т. 1. С. 164 – 176.
11. **Гарифуллина С.Р.** Математическое моделирование и исследование токораспределения в задаче катодной защиты магистральных трубопроводов с использованием технологий параллельного программирования / С.Р. Гарифуллина // Совр. информ. и комп. технологии в инженерно - научных исследованиях: сб. мат. Уфа: РИЦ БашГУ. 2006. Т.1. С. 97 – 111.
12. **Гарифуллина С.Р.** Трехмерная задача токораспределения в системе протяженных электродов в полупространстве / С.Р. Гарифуллина // Студент и научно-технический прогресс: сб. мат. XLV междунар. научной студенческой конф. Новосибирск. 2007. С. 19.
13. **Гарифуллина С.Р.** Метод решения задачи токораспределения в системе протяженных электродов в полупространстве / С.Р. Гарифуллина // Проблемы теор. и прикл. математики: сб. тр. 38-й рег. мол. конф. Екатеринбург. Институт математики и механики Уро РАН. 2007. С. 140 – 144.
14. **Гарифуллина С.Р.** Трехмерная математическая модель электрического поля катодной защиты трубопровода цепью равноудаленных протяженных анодов / С.Р. Гарифуллина // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: сб. тр. Всерос. шк. – конф.

- для студентов, аспирантов и молодых ученых. Уфа: РИЦ БашГУ. 2007. Т. 2. С. 76 – 89.
15. **Гарифуллина С.Р.** Численное решение системы двумерных уравнений Пуассона / С.Р. Гарифуллина // Междунар. матем. конф., посв. памяти А.Ф.Леонтьева. Уфа. Инст. Мат. с ВЦ УНЦ РАН. 2007. Т. 1. С. 62 – 63.
16. **Гарифуллина С.Р.** Расчет электрического поля в системе параллельных протяженных сооружений / С.Р. Гарифуллина // Перспективы развития информационных технологий: сб. тр. I всерос. научно – практ. конф. Новосибирск: Сибпринт. 2008. С. 75 – 80.
17. **Гарифуллина С.Р.** Компьютерное моделирование катодной защиты и поиска дефектов в изоляции трубопроводов / А.М. Болотнов, С.Р. Гарифуллина, О.А. Литвинова, Н.Н. Глазов, Н.П. Глазов, К.Л. Шамшетдинов, М.А. Башаев // Физико-химические аспекты технологии наноматериалов, их свойства и применение: сб. мат. всерос. конф. Москва. 2009. С. 131.
18. **Гарифуллина С.Р.** Математическая модель электрического поля катодной защиты подземного трубопровода протяженным анодом в трехмерном пространстве / С.Р. Гарифуллина // Актуальные проблемы естественных и технических наук: сб. научных тр. межрег. научно-технической конф. памяти проф. Валеева К.А. Уфа: РИЦ БашГУ. 2009. С. 177 – 180.
19. **Гарифуллина С.Р.** Компьютерное моделирование катодной защиты и поиска дефектов в изоляции трубопроводов / А.М. Болотнов, С.Р. Гарифуллина, О.А. Литвинова, Н.Н. Глазов, Н.П. Глазов, К.Л. Шамшетдинов, М.А. Башаев // Физ.-хим. аспекты техн. наноматериалов, их свойства и применение: сб. докл. всерос. конф. Москва. 2010. С. 244 – 252.
20. **Гарифуллина С.Р.** Компьютерное прогнозирование коррозионного состояния трубопровода и оптимизация параметров катодной защиты / А.М. Болотнов, С.Р. Гарифуллина, О.А. Литвинова, Н.Н. Глазов, Н.П. Глазов, М.А. Башаев // Современные проблемы коррозионно-электрохимической науки: мат. всерос. конф., посвященной 100-летию со дня рождения академика Я.М. Колотыркина. Москва. 2010. С. 193.
21. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 17028. Программа «ПО по расчету электрических полей в двух- и трехмерных областях» / **Гарифуллина С.Р.** Зарег. в институте научной информации и мониторинга Российской академии образования «Объединенный фонд электронных ресурсов «наука и образование» 26.04.2011.

**ГАРИФУЛЛИНА Светлана Ринатовна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ  
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРОТЯЖЕННЫХ  
ЭЛЕКТРОДОВ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать 03.10.2011 г. Формат 60x84/16.  
Усл. печ. л. 1,08. Уч.-изд. л. 1,04.  
Тираж 100 экз. Заказ 660.

*Редакционно-издательский центр  
Башкирского государственного университета  
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке  
Башкирского государственного университета  
450074, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*