На правах рукописи

ШАРАФУТДИНОВ Ильдар Вакильевич

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Уфа – 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа в ГОУ ВПО "Стерлитамакская государственная педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой"

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф.
Юмагулов Марат Гаязович

Официальные оппоненты — д-р физ.-мат. наук, проф., г.н.с. Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
Красносельский Александр Маркович

д-р физ.-мат. наук, проф., в.н.с. Института математики с ВЦ УНЦ РАН
Хабибуллин Исмагил Талгатович

Ведущая организация — **Воронежский государственный университет, г. Воронеж**

Защита диссертации состоится "___"__________ 2010 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ГОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет"по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. Карла Маркса, д. 12, корп. 2 (конференц-зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "___"__________ 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф. **БУЛГАКОВА Г. Т.**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Математические модели многих динамических систем приводят к дифференциальным или разностным уравнениям, содержащим негладкие, разрывные или многозначные функции. Таковыми являются системы, содержащие нелинейности типа идеальных или неидеальных реле, гистерезисные звенья различных видов, системы с зонами нечувствительности или насыщения, ударные механизмы и др. К указанным моделям приводят многие задачи механики, физики, биологии, экологии, экономики и т.д. При этом негладкость может присутствовать и как возмущения исходной гладкой системы, и как принципиальный элемент модели. В диссертации для простоты такие модели называются негладкими динамическими системами.

Одной из наиболее интересных и в то же время важной с теоретической и практической точек зрения является задача о локальных бифуркациях динамических систем, в частности, задача о качественных перестройках фазового портрета системы в окрестностях стационарных состояний при изменении параметров системы. Такие бифуркации могут сопровождаться возникновением новых стационарных состояний, периодических колебаний малой амплитуды и др. Теория локальных бифуркаций детально разработана для гладких динамических систем. Исследованию таких систем посвящена обширная литература, для них предложен ряд эффективных качественных и приближенных методов исследования. Существенный вклад в развитие указанной теории внесли А.А.Андронов, В.И.Арнольд, Р.И.Богданов, Дж.Гукенхеймер, Ф.Такенс, Ф.Холмс, Е.Хопф, Л.П.Шильников и др.

Сравнительно меньше исследованы вопросы о локальных бифуркациях для динамических систем, содержащих неаналитические или разрывные нелинейности, хотя и здесь, конечно, известен ряд эффективных методов исследования таких, как метод точечных отображений, методы теории многозначных отображений и дифференциальных включений, методы математической теории систем с гистерезисом. Методы негладкой теории разрабатывались в трудах А.А.Андронова, Б.Д.Гельмана, М.А.Красносельского, К.Куратовского, А.Ласоты, А.Д.Мышкиса, Ю.И.Неймарка, В.В.Обуховского, А.В.Покровского, Я.З.Цыпкина, А.Ф.Филиппова и др.

Многие негладкие динамические системы характеризуются тем, что свойства гладкости (непрерывности) входящих в математическую модель функций могут нарушаться на некоторых многообразиях фазового пространства системы, коразмерность которых равна единице. При этом в задаче о локальных бифуркациях в окрестности стационарного состояния системы указанные многообразия могут либо содержать стационарное состояние, либо располагаться “вблизи” него. Такие динамические системы для простоты в диссертации названы M-системами. В частности, многие задачи о локальных бифуркациях для систем, содержащих релейные или гистерезисные нелинейности, приводят к M-системам. При исследовании математических моделей M-систем возникают следующие вопросы:

1. При каких условиях на M-системы могут быть получены аналоги известных в теории гладких динамических систем достаточных признаков локальных бифуркаций?

2. Каковы основные сценарии бифуркационного поведения M-систем? В частности, каковы свойства бифурцирующих решений при достижении ими многообразий нарушения гладкости?

3. Задачи исследования локальных бифуркаций достаточно сложны для теоретического исследования даже для гладких динамических систем. Поэтому при их исследовании часто используются численные методы; особенно эффективны здесь итерационные методы построения решений. Возникают естественные вопросы о разработке схем приближенного построения бифурцирующих решений для M-систем и, в частности, вопросы о разработке алгоритмов и программ численного исследования задачи.

4. Одним из наиболее важных в теории локальных бифуркаций является вопрос об устойчивости бифурцирующих решений. Существующие алгоритмы исследования этого вопроса в большинстве своем сложны и низкоэффективны. Представляется важным провести детальный анализ таких алгоритмов и разработать на их основе новые алгоритмы исследования устойчивости, эффективные как для гладких динамических систем, так и для M-систем.

Изучение указанных вопросов имеет как теоретическую, так и практическую значимость. Эти вопросы определяют актуальность темы настоящего исследования по разработке методов качественного и приближенного исследования локальных бифуркаций динамических систем, математические модели которых содержат негладкие или разрывные функции.

Целью исследования является разработка качественных и приближенных методов анализа бифуркационных явлений в системах, математические модели которых содержат разрывные или негладкие нелинейности. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Конструирование семейств операторных уравнений, определяющих основные сценарии бифуркационного поведения решений широкого класса негладких динамических систем;

2. Разработка итерационных процедур приближенного исследования операторных уравнений и получение на их основе асимптотических формул для бифурцирующих решений;

3. Разработка и обоснование схемы исследования устойчивости решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа, приводящей к эффективным алгоритмам анализа устойчивости;

4. Разработка программ компьютерного моделирования бифуркационного поведения системы.

Методы исследования. Использованы общие методы качественной теории дифференциальных уравнений, нелинейного анализа, методы приближенного решения операторных уравнений, метод Ньютона-Канторовича, методы теории Флоке и малого параметра исследования устойчивости, метод функционализации параметра исследования бифуркационных задач.

Научная новизна определяется впервые проведенными исследованиями, в результате которых разработан математический аппарат для анализа бифуркационных явлений в динамических системах, математические модели которых содержат разрывные или негладкие нелинейности. При этом получены следующие новые научные результаты:

1. Разработана новая схема конструирования операторных уравнений, определяющих основные сценарии бифуркационного поведения решений широкого класса негладких динамических систем;

2. Предложена новая схема аналитического исследования бифуркации стационарных решений и бифуркации Андронова-Хопфа в системах с негладкими правыми частями, получены новые количественные признаки бифуркации и асимтотические формулы для бифурцирующих решений;

3. Разработаны итерационные процедуры приближенного исследования задач о локальных бифуркациях в системах с негладкими правыми частями;

4. Предложена и обоснована новая схема исследования устойчивости решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа, являющаяся новой как для гладких, так и негладких динамических систем; разработан алгоритм численного исследования устойчивости;

5. Разработаны программы компьютерного моделирования бифуркационного поведения динамических систем с гладкими и негладкими нелинейностями.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработка схемы конструирования операторных уравнений, определяющих основные сценарии бифуркационного поведения решений широкого класса негладких динамических систем;

2. Разработка схемы аналитического исследования локальных бифуркаций в негладких динамических системах, приводящей к асимтотическим формулам для бифурцирующих решений;

3. Разработка итерационной процедуры приближенного исследования задач о локальных бифуркациях в негладких динамических системах;

4. Разработка схемы и алгоритма исследования устойчивости решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа для широкого класса гладких и негладких динамических систем.

Практическая и теоретическая значимость. В работе предложены и обоснованы аналитический и приближенный методы исследования задач о локальных бифуркациях в динамических системах, математические модели которых содержат разрывные или негладкие нелинейности. Предлагаемые методы могут быть использованы при построении математического аппарата для анализа бифуркационных явлений в системах, содержащих нелинейности типа идеальных или неидеальных реле, гистерезисные звенья различных видов, ударные механизмы и т.п.

Полученные результаты доведены до расчетных формул и алгоритмов, составлены и отлажены соответствующие программы в среде MAT-LAB. Предложенные схемы, процедуры и программы апробированы при решении ряда практических задач: моделирование динамики сложного поведения жидкостей и газов, автоматическое управление ориентацией деформируемого космического аппарата, моделирование движения груза на движущемся транспортере и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Региональной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике (г. Уфа, БГУ, 30-31 октября 2003 г.), на Второй Всероссийской научной конференции “Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB” (г. Москва, Институт проблем управления РАН, 25-26 мая 2004 г.), на Десятом Международном семинаре им. Е.С.Пятницкого “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (г. Москва, Институт проблем управления РАН, 3-6 июня 2008 г.), на Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы” (г. Стерлитамак, 24-28 июня 2008 г.), на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений Башгосуниверситета (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Султанаев Я.Т.), кафедры алгебры и геометрии Магнитогорского госуниверситета (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Смолин Ю.Н.), кафедры математического анализа Стерлитамакской государственной педагогической академии (руководитель — д.ф.-м.н., профессор Калиев И.А.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]–[8], при этом статьи [1]–[3] опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК.

Личный вклад соискателя. Постановки основных задач принадлежат научному руководителю. Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ [2] и [5], опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в обосновании предлагаемых алгоритмов исследования устойчивости и разработке соответствующих программ.

Объем и структура диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, одиннадцати параграфов, заключения и Приложения А. Общий объем диссертации составляет 140 страниц, включая 17 иллюстраций и Приложение А. Библиография содержит 103 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы, сформулированы цель и основные задачи исследования, приводится обзор литературных источников, кратко излагается содержание работы.

В **первой главе** приводятся общие сведения из теории динамических систем и локальных бифуркаций. Глава носит вспомогательный характер.

Рассматривается система, динамика которой в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ описывается дифференциальным уравнением вида

$$x' = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

где λ — скалярный или векторный параметр. Предполагается, что выполнено условие: $f(0, \lambda) \equiv 0$.

Систему (1) будем называть гладкой, если существует шар $T(0,\delta)$ такой, что для любого $x \in T(0,\delta)$ существует матрица Якоби $f'_x(x,\lambda)$, которая является непрерывной. В этом случае система (1) может быть представлена в виде

$$x' = A(\lambda)x + a(x,\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где $A(\lambda) = f'_x(0,\lambda)$, а функция $a(x,\lambda)$ содержит слагаемые выше первой степени относительно x:

$$a(x,\lambda) = a_2(x,\lambda) + a_3(x,\lambda) + b(x,\lambda), \tag{3}$$

где $a_2(x,\lambda)$ и $a_3(x,\lambda)$ — квадратичная и кубическая нелинейности соответственно, а $b(x,\lambda)$ содержит члены более высокой степени.

Основными видами локальных (в окрестности решения $x = 0$) бифуркаций системы (1) являются бифуркации стационарных решений и бифуркация Андронова-Хопфа. Приведем соответствующие определения.

Значение λ_0 называется точкой бифуркации стационарных решений для системы (1), если найдется последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$ такая, что при каждом $\lambda = \lambda_n$ система (1) имеет ненулевое стационарное решение x_n, при этом $\|x_n\| \to 0, \quad n \to \infty$.

Значение λ_0 называют точкой бифуркации Андронова-Хопфа для системы (1), если найдется последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$ такая, что при каждом $\lambda = \lambda_n$ система (1) имеет нестационарное периодическое решение $x = x_n(t)$ некоторого периода T_n, при этом $\max\limits_t |x_n(t)| \to 0, \quad n \to \infty$.

В первой главе приводятся известные результаты относительно признаков локальных бифуркаций и используемые в диссертации схемы их приближенного исследования.

Во **второй главе** изучаются негладкие динамические системы. Основным объектом в работе являются M-системы; опишем их.

Рассматривается система, динамика которой в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$ описывается дифференциальным уравнением вида

$$x' = F(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N\,. \tag{4}$$

Предполагается, что выполнено условие: $F(0) = 0$.

Положим

$$\Pi_0 = \{x: \ (x,b_0) = \alpha_0\}\,, \tag{5}$$

где $b_0 \in \mathbb{R}^N$ — некоторый ненулевой вектор и $\alpha_0 \geqslant 0$; при $\alpha_0 = 0$ гиперплоскость Π_0 содержит точку $x = 0$, при малых $\alpha_0 > 0$ она располагается “вблизи” нее. Наряду с (5) будем рассматривать два полупространства

$$\Pi_+ = \{x: \ (x,b_0) > \alpha_0\}\,, \quad \Pi_- = \{x: \ (x,b_0) < \alpha_0\}\,. \tag{6}$$

Будем считать, что правая часть $F(x)$ системы (4) представима в виде

$$F(x) = \begin{cases} F_+(x), \ x \in \Pi_+ \,, \\ F_-(x), \ x \in \Pi_- \,, \\ F_0(x), \ x \in \Pi_0 \,, \end{cases} \tag{7}$$

где функции $F_+(x)$ и $F_-(x)$ предполагаются гладкими (т.е. непрерывно дифференцируемыми) в соответствующих полупространствах вплоть до гиперплоскости (5). Функция $F_0(x)$ также предполагается гладкой на гиперплоскости (5) и при этом может совпадать с сужением одной из функций $F_+(x)$ или $F_-(x)$ на гиперплоскость (5) или не совпадать ни с одним из них. Динамические системы, обладающие указанными свойствами, будем называть M-системами.

В п. 2.1 диссертации приводятся необходимые сведения о M-системах, а также некоторые задачи из механики, приводящие к соответствующим моделям. Приведем для иллюстрации две такие модели, исследование которых было проведено предложенными в диссертации методами.

Пример 1: модель Лэнгфорда.

При моделировании турбулентности в жидкости О. Лэнгфордом были предложены модели, имеющие богатое бифуркационное поведение. В частности, при рассмотрении динамики двухслойной жидкости возникает M-система вида (2), в которой $x \in \mathbb{R}^3$,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad a(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -x_1|x_3| \\ -x_2|x_3| \\ -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{pmatrix},$$

В этой модели гладкость правой части нарушается на плоскости $x_3 = 0$.

В диссертации проведено исследование указанной модели; в частности, показано, что она при $\lambda < 1/2$ не имеет циклов в окрестности состояния равновесия $x = 0$, а при $\lambda > 1/2$ имеет семейство циклов в полупространстве $x_3 < 0$, стягивающихся к нулю при $\lambda \to 1/2 + 0$ (см. Рисунок 1).

Пример 2: груз на транспортере.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о моделировании движения груза на транспортере (см. Рисунок 2). Груз прикреплен пружиной к неподвижной стене. Лента транспортера движется с постоянной линейной скоростью v_T.

Пусть k — жесткость пружины, F_{Tp} — величина сухого трения, параметр δ характеризует вязкое трение. В соответствующих координатах движение

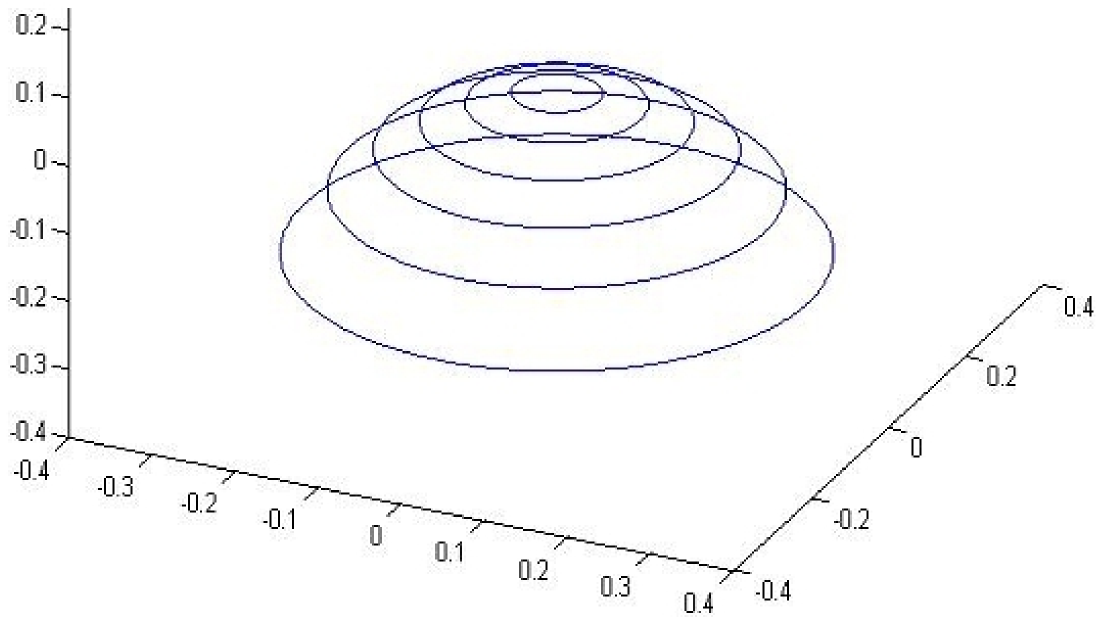


Рисунок 1 — Семейство бифурцирующих решений системы Лэнгфорда.

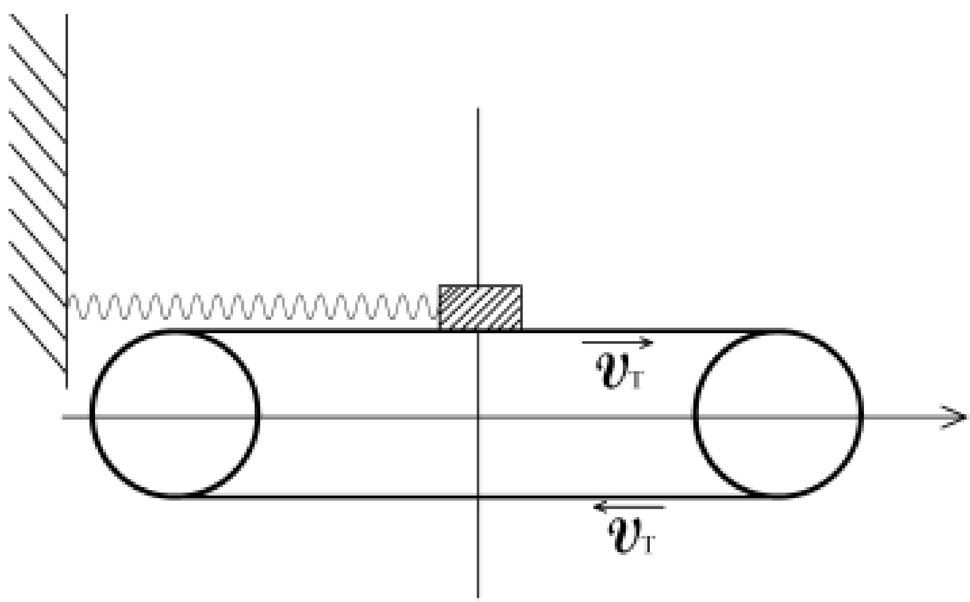
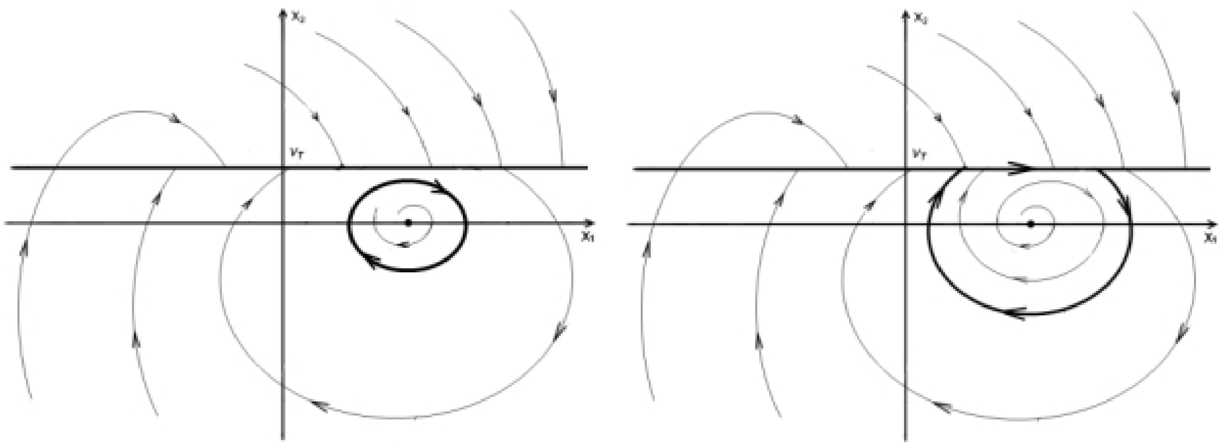


Рисунок 2 — Груз на транспортере.



a) *b)*

Рисунок 3 — Фазовый портрет системы (8).

груза описывается системой

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= \dfrac{1}{m} g(x_1, x_2) + \delta x_2 + \varepsilon(x_2) \ , \end{cases} \tag{8}$$

где

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} -F_{Tp} - kx_1, & x_2 > v_T, \\ \ \ F_{Tp} - kx_1, & x_2 < v_T, \end{cases} \tag{9}$$

а $\varepsilon(x_2)$ содержит нелинейные характеристики силы сопротивления, зависящие от квадрата или более высокой степени скорости груза. В этой модели гладкость правой части нарушается на прямой $x_2 = v_T$.

В диссертации проведено исследование указанной модели; в частности, показано, что если параметр $\delta > 0$ достаточно мал, то система (8) имеет периодическое решение малой амплитуды, целиком расположенное в полуплоскости $x_2 < v_T$. В этом случае фазовый портрет системы (8) имеет вид, изображенный на рисунке 3, *a)*.

В случае же, когда параметр δ превышает некоторое критическое значение, амплитуда цикла возрастает настолько, что не позволяет ему целиком расположиться в полуплоскости $x_2 < v_T$. Тогда фазовый портрет выглядит так, как на рисунке 3, *b)*.

Основное внимание во второй главе уделено разработке аналитических и приближенных методов исследования задач о локальных бифуркациях в M-системах вида

$$x' = F(x, \lambda)\,, \quad x \in \mathbb{R}^N\,, \tag{10}$$

в котором функция $F(x, \lambda)$ имеет аналогичное (7) представление, при этом $F(0, \lambda) \equiv 0$. Предполагается, что в одном из полупространств (6) функция $F(x, \lambda)$ представима в виде

$$F(x, \lambda) = A(\lambda)x + a(x, \lambda)\,, \tag{11}$$

в котором $A(\lambda)$ — квадратная матрица, а нелинейность $a(x,\lambda)$ имеет аналогичное (3) представление.

В п. 2.2 диссертации изучается задача о бифуркации стационарных решений в M-системах вида (10) в следующих двух основных случаях.

Сначала рассматривается случай, когда определенная равенством (5) гиперплоскость Π_0 содержит точку $x = 0$, т.е. $\alpha_0 = 0$. Пусть для определенности функция $F(x,\lambda)$ представима в виде (11) в первом из полупространств (6), т.е. в полупространстве Π_+.

Пусть матрица $A(\lambda_0)$ имеет нулевое простое собственное значение, а все остальные ее собственные значения не лежат на мнимой оси. Тогда транспонированная матрица A_0^* также имеет простое собственное значение 0. Обозначим через e_0 и g_0 собственные векторы, отвечающие собственному значению 0 матриц A_0 и A_0^* соответственно.

Теорема 1. *Пусть* $(A'(\lambda_0)e_0, g_0) \neq 0$*. Пусть вектор* e_0 *не лежит в гиперплоскости* Π_0*, т. е.* $(e_0, b_0) \neq 0$*. Тогда* λ_0 *является точкой бифуркации стационарных решений* M*-системы* (10).

Из этого утверждения следует, что если матрица $A(\lambda_0)$ имеет нулевое собственное значение, то, как правило, λ_0 является точкой бифуркации стационарных решений M-системы (10).

Затем в п. 2.2 рассматривается случай, когда определенная равенством (5) гиперплоскость Π_0 не содержит точку $x = 0$, т.е. $\alpha_0 > 0$. Этот случай разбивается на два подслучая в зависимости от того, в каком из полупространств (6) функция $F(x,\lambda)$ представима в виде (11). В диссертации обсуждаются оба эти подслучая и рассматриваются соответствующие модельные примеры.

В п. 2.3 диссертации изучается задача о бифуркации Андронова-Хопфа в M-системах вида (10). Эта задача существенно сложнее, чем задача о бифуркации стационарных решений. В задаче о бифуркации Андронова-Хопфа для гладких динамических систем предполагается, что размерность N фазового пространства $\mathbb{R}^N$ должна удовлетворять неравенству $N \geqslant 2$, при этом случаи $N = 2$ и $N \geqslant 3$ не являются принципиально различными. Для негладких систем это не так.

Сначала в диссертации рассматривается случай $N \geqslant 3$ и когда определенная равенством (5) гиперплоскость Π_0 содержит точку $x = 0$, т.е. $\alpha_0 = 0$. Для определенности предположим, что функция $F(x,\lambda)$ представима в виде (11) в полупространстве Π_+.

Пусть матрица $A_0 = A(\lambda_0)$ имеет простые собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$, а остальные ее собственные значения не лежат на мнимой оси. Тогда найдутся такие пары линейно независимых векторов $e, g \in R^N$ и

$e^*, g^* \in R^N$, что

$$A_0 e = -\omega_0 g,\ A_0 g = \omega_0 e,\ A_0^* e^* = \omega_0 g^*,\ A_0^* g^* = -\omega_0 e^*; \tag{12}$$

$$|e| = |g| = 1,\ (e, e^*) = (g, g^*) = 1,\ (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \tag{13}$$

Определим функции

$$e(t) = e\cos 2\pi t - g\sin 2\pi t\,, \quad g(t) = g\cos 2\pi t + e\sin 2\pi t\,, \tag{14}$$

и функционалы

$$\alpha[x(t)] = (x_c, g^*) + (x_s, e^*), \quad \beta[x(t)] = (x_c, e^*) - (x_s, g^*), \tag{15}$$

где векторы x_c и x_s — это отвечающие $\cos 2\pi t$ и $\sin 2\pi t$ коэффициенты Фурье функции $x(t) \in C[0,1]$.

Определим оператор

$$\Theta x(t) = x(t) - t\,x(1)\,, \tag{16}$$

и числа

$$\gamma_1 = (A'e, e^*) + (A'g, g^*)\,, \quad \gamma_2 = (A'g, e^*) - (A'e, g^*)\,. \tag{17}$$

здесь $A' = A'(\lambda_0)$.

Положим

$$\Pi h(t) = Bh(t) - h(t) + \frac{1}{2T_0}\alpha[h(t)][e(t) - e] + \frac{T_0}{4\pi}\beta[h(t)]A'[g(t) - g], \tag{18}$$

где $T_0 = 2\pi/\omega_0$, $Bh(t) = h(1) + T_0\displaystyle\int_0^t A(\lambda_0)h(s)\,ds$. Оператор $\Pi:\ C[0,1] \to C[0,1]$ непрерывно обратим если и только если $\gamma_1 \neq 0$; это условие будем считать выполненным. Положим

$$\Gamma = \Pi^{-1}:\ C[0,1] \to C[0,1]. \tag{19}$$

Определим функции

$$\psi_k(t) = \int_0^t a_k[e(s); \lambda_0]\,ds\,, \qquad k = 2, 3\,, \tag{20}$$

и оператор

$$Wh(t) = \frac{1}{2}\left\{\alpha[h(t)]\psi_2(t) + T_0\beta[h(t)]\int_0^t a'_{2\lambda}[e(s); \lambda_0]\,ds + \right. \tag{21}$$

$$+2T_0 \int\limits_0^t a'_{2x}[e(s);\lambda_0]h(s)\,ds \Bigg\}\ ,$$

где $a'_{2\lambda}(x;\lambda)$ — производная вектор-функции $a_2(x;\lambda)$ по λ, $a'_{2x}(x;\lambda)$ — ее матрица Якоби.

Положим также

$$\psi_1(t) = W\Gamma\psi_2(t) - \psi_3(t)\,, \tag{22}$$

$$e_1(t) = -T_0\Gamma\psi_2(t)\,, \qquad e_2(t) = T_0\Gamma\psi_1(t)\,, \tag{23}$$

где Γ и W — операторы (19) и (21).

Наконец, положим

$$\lambda_1^* = \frac{2\pi}{\gamma_1}\alpha[\Theta\psi_1(t)]\,, \tag{24}$$

$$T_1^* = \frac{T_0^2}{2}\left\{\beta[\Theta\psi_1(t)] - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\alpha[\Theta\psi_1(t)]\right\}\,. \tag{25}$$

Пусть E_0 — собственное подпространство оператора $A(\lambda_0)$, отвечающее собственным значениям $\pm\omega_0 i$.

Теорема 2. *Пусть $\gamma_1 \neq 0$ и $\lambda_1^* \neq 0$. Пусть $E_0 \subset \Pi_0$ и $(e_1(0), b_0) > 0$. Тогда λ_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа для M-системы* (10). *При этом нестационарные периодические решения $x(t;\lambda)$ системы (10) малой амплитуды существуют только при $\lambda < \lambda_0$, если $\lambda_1^* < 0$, или только при $\lambda > \lambda_0$, если $\lambda_1^* > 0$.*

Теорема 3. *Существующие в условиях теоремы 2 периодические решения $x(t;\lambda)$ системы* (10) *имеют период $T(\lambda)$, при этом функции $T(\lambda)$ и $y(t;\lambda) \equiv x[tT(\lambda);\lambda]$ представимы в виде*

$$T(\lambda) = T_0 + \frac{T_1^*}{|\lambda_1^*|}|\lambda - \lambda_0| + T_2(\lambda), \tag{26}$$

$$y(t;\lambda) = |\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_1^*}|^{\frac{1}{2}}e(t) + |\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_1^*}|e_1(t) + |\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_1^*}|^{\frac{3}{2}}e_2(t) + \delta(t;\lambda), \tag{27}$$

где $T_2(\lambda) = o(|\lambda-\lambda_0|)$ и $\max\limits_t|\delta(t;\lambda)| = o(|\lambda-\lambda_0|^{\frac{3}{2}})$.

Замечание 1. *Известно, что условий $\gamma_1 \neq 0$ и $\lambda_1^* \neq 0$ достаточно для того, чтобы λ_0 было точкой бифуркации Андронова-Хопфа гладкой динамической системы. Из теоремы 2 следует, что λ_0 будет точкой бифуркации Андронова-Хопфа для M-системы* (10) *лишь при дополнительных существенных предположениях: $E_0 \subset \Pi_0$ и $(e_1(0), b_0) > 0$.*

Формулы (26) и (27) позволяют провести приближенное исследование бифуркации Андронова-Хопфа для M-системы (10). Соответствующее исследование в диссертации проведено для некоторых негладких моделей, в частности, моделей Лэнгфорда и Лоренца.

В диссертации рассмотрены также случай $N = 2$ (п. 2.4) и случай $N \geqslant 2$ (п. 2.5) в предположении, когда определенная равенством (5) гиперплоскость Π_0 не содержит точку $x = 0$, т.е. $\alpha_0 > 0$. Этот случай разбивается на два подслучая в зависимости от того, в каком из полупространств (6) функция $F(x, \lambda)$ представима в виде (11). В диссертации обсуждаются все эти случаи и рассматриваются соответствующие модельные примеры, в частности, модель управления ориентацией космических аппаратов и модель движения груза на транспортере.

В **третьей главе** основное внимание уделено разработке и обоснованию алгоритма исследования устойчивости периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа. Предлагаемый алгоритм является новым как для гладких, так и для негладких систем.

Приведем основные положения предлагаемого алгоритма применительно к гладкой системе вида (2) в предположении, что для нее выполнены условия $\gamma_1 \neq 0$ и $\lambda_1^* \neq 0$. В этом случае для системы (2) имеют место аналоги теорем 2 и 3.

Основной характеристикой в задаче исследования устойчивости периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа является число

$$\delta_0 = \alpha[\Theta\psi_1(t)]\,. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть для системы* (2) *выполнены условия* $\gamma_1 \neq 0$, $\lambda_1^* \neq 0$ *и* $\delta_0 \neq 0$. *Пусть* $x(t, \lambda)$ *— это существующие при близких к* λ_0 *значениях* λ *нестационарные периодические решения системы (2) малой амплитуды. Тогда свойства устойчивости решений* $x(t, \lambda)$ *и решения* $x = 0$ *уравнения* (2) *при тех же* λ, *близких к* λ_0, *противоположны:* $x(t, \lambda)$ *асимптотически орбитально устойчиво (неустойчиво) тогда и только тогда, когда решение* $x = 0$ *неустойчиво (асимптотически устойчиво).*

Теорема 5. *Пусть* $\delta_0 > 0$ $(\delta_0 < 0)$. *Тогда бифурцирующие решения* $x(t, \lambda)$ *системы* (2), *существующие в условиях теоремы 4, асимптотически орбитально устойчивы (неустойчивы).*

Теоремы 4 и 5 позволяют существенно упростить анализ устойчивости бифурцирующих решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа так как они позволяет свести решение этой задачи к исследованию устойчивости нулевого решения исходной системы, что существенно проще, чем непосредственное исследование устойчивости бифурцирующих решений.

Опишем кратко предлагаемый алгоритм исследования устойчивости решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа.

1. Вычисление векторов из (13) и функций (14).
2. Вычисление функций (20).
3. Вычисление функции (22).
4. Вычисление числа (28).

В диссертации предлагаемый алгоритм реализован программно в среде MATLAB. Текст программы вынесен в **Приложение**. В работе проведено исследование устойчивости решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа для моделей Лоренца, Лэнгфорда и Льенара.

В **четвертой главе** изучается бифуркационное поведение систем, определенных в конусных множествах фазового пространства. Рассматривается динамическая система, описываемая уравнением

$$x' = A(\lambda)x + a(x,\lambda), x \in \mathbb{R}^N, N \geqslant 2, \lambda \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

где $A(\lambda)$ квадратная матрица порядка N, непрерывно зависящая от параметра λ, $a(x,\lambda)$ — нелинейность, непрерывная по совокупности переменных и такая, что $a(0,\lambda) = 0$. Предположим, что матрица $A_0 = A(\lambda_0)$ имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0, \omega_0 > 0$. Будем использовать обозначения из (12), (13) и (17).

Через E_0 обозначим двумерное подпространство в $\mathbb{R}^N$ с базисом из векторов e и g, а через E^0 — подпространство размерности $N-2$, дополнительное к E_0 и инвариантное для оператора A_0. Тогда $\mathbb{R}^N$ разлагается в прямую сумму E_0 и E^0: $\mathbb{R}^N = E_0 \oplus E^0$.

Любой элемент $x \in \mathbb{R}^N$ представляется в виде $x = Px + Qx$, где P и Q — операторы проектирования на E_0 и E^0 соответственно.

Для числа $\delta_0 \in (0;1)$ определим конусную окрестность K_0 подпространства E_0:

$$K_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : \|Qx\| \leqslant \delta_0 \|Px\|\}.$$

В четвертой главе изучается задача о бифуркации Андронова-Хопфа для системы (29) в случае, когда нелинейность $a(x,\lambda)$ удовлетворяет предположению

$$\frac{\|a(x,\lambda)\|}{\|x\|} \to 0, \quad \|x\| \to 0, \quad x \in K_0.$$

Основной в главе является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\gamma_1 \neq 0$. Тогда λ_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа для системы (29), причем существующие бифурцирующие решения лежат в конусной окрестности K_0: $x(t,\lambda) \in K_0$ при всех близких к λ_0 значениях λ.*

В диссертации рассматриваются и обсуждаются модельные примеры, иллюстрирующие условия теоремы 6.

В **Заключении** сформулированы основные результаты работы:

1. Предложены новые схемы построения операторных уравнений, определяющих основные сценарии бифуркационного поведения решений широкого класса негладких динамических систем.

2. С помощью сконструированных семейств операторных уравнений установлены количественные признаки бифуркации и формулы асимптотического представления бифурцирующих решений в динамических системах с негладкими правыми частями. Доказаны теоремы о типе бифуркации в негладких динамических системах.

3. Разработана итерационная процедура приближенного исследования задач о локальных бифуркациях в динамических системах с негладкими правыми частями, позволившая получить асимптотические формулы для рождающихся периодических решений и для их периодов.

4. Доказана теорема об обмене устойчивостью между нулевым стационарным решением и рождающимися периодическими решениями. На основе теоремы разработан новый численный алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний при бифуркации Андронова-Хопфа для широкого класса гладких и негладких динамических систем. Алгоритм программно реализован в среде MATLAB. Методом вычислительного эксперимента построены фазовые портреты некоторых негладких динамических системах, а также рассчитаны числовые характеристики, определяющие тип бифуркации и устойчивость бифурцирующих решений.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых изданиях из списка ВАК

1. Бифуркации периодических решений в конусных окрестностях. /Шарафутдинов И. В. // Вестник Башкирского университета. № 4. 2005 г. — С. 11–14.

2. Алгоритм исследования устойчивости периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа. / Кузнецов Н. А., Юмагулов М. Г., Шарафутдинов И. В. // Автоматика и телемеханика. № 12. 2008 г. — С. 47–52.

3. Бифуркация Андронова-Хопфа в системах с негладкими нелинейностями. / Шарафутдинов И. В. // Вестник Тамбовского университета. Том 14. вып. 4. 2009 г. — С. 835–837.

В других изданиях

4. Правильные точки бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений. / Шарафутдинов И. В. // Труды региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Уфа: БГУ — 2003 г. — С. 50–52.

5. Алгоритмы исследования периодических решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа. / Юмагулов М. Г., Нуров И. Д., Шарафутдинов И. В. // Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB: Труды Второй Всероссийской научной конференции. Москва: Институт проблем управления РАН. — 2004 г. — С. 578–583.

6. Об одном алгоритме исследования циклов при бифуркации Андронова-Хопфа. / Шарафутдинов И. В. // Вестник Магнитогорского государственного университета. № 4. 2006 г. — С. 45–49.

7. Операторный признак устойчивости периодических колебаний в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа. / Шарафутдинов И. В. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Труды Десятого Международного семинара имени Е. С. Пятницкого. Москва: Институт проблем управления РАН. — 2008 г. С. — 370–372.

8. Обмен устойчивостью при бифуркации Андронова-Хопфа. / Шарафутдинов И. В. // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции. Стерлитамак: СГПА им. Зайнаб Биишевой. — 2008 г. — С. 254–258.

Соискатель И. В. Шарафутдинов

ШАРАФУТДИНОВ Ильдар Вакильевич

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕГЛАДКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 24.12.2009. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр. – отт. 1,0. Уч. изд. л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 628.

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12