На правах рукописи

ЗАХАРОВА Ольга Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Уфа – 2009

Работа выполнена на кафедре математики в ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф.
НАСЫРОВ Фарит Сагитович

Официальные оппоненты — д-р физ.-мат. наук, проф.
БРОНШТЕЙН Ефим Михайлович
проф. кафедры вычислительной математики
и кибернетики УГАТУ

д-р физ.-мат. наук
КУЗНЕЦОВ Дмитрий Феликсович
проф. кафедры высшей математики СПбГПУ

Ведущая организация — **Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа**

Защита диссертации состоится 15 декабря 2009 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. К. Маркса, д. 12, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан «12» ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф. — **БУЛГАКОВА Г. Т.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы

В данной работе исследуются модели некоторых колебательных процессов, описываемых системами стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), и стохастическими уравнениями в частных производных гиперболического типа.

Первой является модель взаимодействия двух конкурирующих видов. Рассматриваются две многочисленные взаимодействующие популяции, в которых большое место играет диффузия. Колонии одинаковых видов могут отличаться, например, местом обитания, статусом больной/здоровый в эпидемии, или иными признаками. Предполагается, что в каждой популяции с разной интенсивностью, зависящей от условий среды (пища, природные катаклизмы и др.) индивиды могут рождаться, умирать и мигрировать (либо заболевать и выздоравливать, если популяции рассматривать как один и тот же вид, подверженный эпидемии). Частным случаем такой модели является стохастическая модель Лотки-Вольтерра. Кроме того, той же моделью описывается изменение концентраций химических веществ в автоколебательных реакциях.

Второй класс моделей представляет собой колебание упругой струны под действием случайной внешней силы. Оно характеризуется первой краевой задачей для волнового уравнения со случайной внешней силой в виде шума с начальными и граничными условиями, аналогичной задачей колебания прямоугольной мембраны, а также задачей о колебании бесконечной струны под действием случайной внешней силы в одномерном и многомерном случаях.

Рассматриваемые модели исследовались многими авторами (Кузнецовым Д. Ф., Розовским Б. Л., Allen E., Alos E., Oksendal B., и др.), но точное решение удавалось получить лишь в ограниченном числе случаев. Поэтому существенную роль в изучении моделей со случайными возмущениями играют способы численного решения. Огромный вклад в теорию численного моделирования СДУ и систем таких уравнений внесли работы Кузнецова Д. Ф., Мильштейна Г. Н., Allen E., Kloeden P. E., Platen E. Однако, численное моделирование решения систем СДУ продолжает оставаться трудной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения задачей.

СДУ в частных производных гиперболического типа исследовались в работах Allen E., Da Prato G., Dalang R. C., Frangos N. E., Holden H.., Khoshnevisan D., Rassoul-Agha F., Kotelenez P., Oksendal B., Uboe, J., Zhang T. и др., обсуждались вопросы существования и единственности решения, оценки моментов, гельдеровские условия и другие свойства решений, однако способов решения или численного моделирования предложено не было. Примеров моделей, описываемых такими уравнениями, можно привести множество: колебания струн, мембран, течение тока в проводниках в среде со случайными внешними возмущениями и др. Поэтому разработка методов численного решения колебательных процессов в среде со случайным возмущением, характеризующихся системами СДУ и СДУ в частных производных гиперболического типа, является весьма актуальной задачей.

Цель работы

Целью данной работы является численно-аналитическое решение и моделирование некоторых колебательных процессов в среде со случайными возмущениями, а именно: колебаний численности конкурирующих видов и концентраций реагентов в автоколебательных реакциях, колебаний бесконечной и закрепленной упругой струны и закрепленной мембраны.

Первые два процесса описываются системой СДУ, третий процесс можно описать задачей Коши. Четвертый и пятый – первой краевой задачей для стохастического волнового уравнения.

Поставленная цель достигается в результате решения следующих *задач*:

1. Выбор математических моделей колебательных процессов в среде со случайными возмущениями;

2. Разработка аналитического аппарата для решения одного класса систем СДУ, а также СДУ в частных производных гиперболического типа, в частности, стохастических волновых уравнений;

3. Численное моделирование динамики численности конкурирующих видов и концентраций химических веществ, в среде со случайными возмущениями, а также колебаний закрепленной упругой струны и мембраны под действием случайной внешней силы.

Методы исследования

Аналитические исследования проводились с использованием методов теории случайных процессов, математической физики, теории функции действительной переменной, функционального анализа и вычислительной математики. Расчеты проводились в среде Matlab с использованием стандартных пакетов.

На защиту выносятся:

1. Способ численно-аналитического решения колебательных процессов в среде со случайными возмущениями, в частности, стохастической системы Лотки-Вольтерра динамики численности конкурирующих видов (концентраций реагентов в автоколебательной реакции) в среде со случайными возмущениями;

2. Способ численно-аналитического решения колебательных процессов в среде со случайными возмущениями, которые описываются СДУ в частных

производных гиперболического типа, а именно, колебания упругой струны и мембраны под действием случайных возмущений;

3. Аналитический метод решения одного класса систем СДУ. Первый интеграл стохастической системы Лотки-Вольтерра динамики численности конкурирующих видов (концентраций реагентов в автоколебательных реакциях) в среде со случайными возмущениями. Аналоги формул Даламбера и Кирхгофа для решения задачи Коши колебания бесконечной струны под действием случайной внешней силы.

Научная новизна

1. Разработан новый способ численно-аналитического решения широкого класса систем СДУ и СДУ в частных производных гиперболического типа;

2. Разработанный метод адаптирован к численному решению стохастической модели Лотки-Вольтерра колебания численности конкурирующих видов и концентраций реагирующих химических веществ в среде со случайными возмущениями, к численному решению задач колебания упругой струны и мембраны под действием случайных внешних возмущений;

3. Построены стохастические аналоги формул Даламбера и Кирхгофа для решения модели колебания бесконечной, упругой струны под действием случайного внешнего возмущения.

Теоретическая и практическая значимость

Разработанный в рамках данной работы численно-аналитический метод решения СДУ в частных производных может быть использован для исследования моделей, описывающих различные физические, механические, биологические колебательные процессы в среде со случайными возмущениями.

Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена строгостью аналитических доказательств полученных результатов. Численные схемы исследованы на предмет сходимости.

Апробация работы

Основные результаты диссертации были представлены и обсуждались на научных семинарах и конференциях, соответствующих профилю диссертации. В частности были сделаны доклады:

1) на XXXVII Региональной молодежной конференции (г. Екатеринбург, 2006г.);

2) на XIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва, 2006г.);

3) на XIV Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (г. Сочи, 2007г.);

4) на XV международной научной конференции студентов, аспирантов и

молодых ученых "Ломоносов" (г. Москва, 2008г.);

5) на XVI Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (г. Санкт-Петербург, 2009г.);

6) на семинаре в институте математики с ВЦ УНЦ РАН, руководитель профессор Жибер А. В. (Уфа, 2009 г.);

7) на семинарах по теории вероятностей и математической статистике кафедры математики УГАТУ, руководитель профессор Насыров Ф. С.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [12], в том числе 5 публикаций в изданиях, рекомендованных ВАК, и 7 публикаций в других изданиях.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, разбитых на параграфы, 3 таблиц, 11 рисунков, заключения и библиографического списка литературы, включающего 76 работ отечественных и зарубежных авторов, 3 приложений. Общий объем работы составляет 120 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение. Во введении обосновывается актуальность работы, сформулированы ее цели и задачи. Кроме этого, дан краткий обзор по тематике вопроса, сформулированы основные результаты, полученные в работе, излагается описание диссертации по главам.

Глава 1. Постановка задачи.

В данной главе строятся математические модели некоторых колебательных процессов в среде со случайным возмущением в виде окрашенного шума.

Первый класс моделей описывает три процесса: динамику численности двух конкурирующих видов, развитие эпидемии в замкнутой популяции и изменение концентраций реагентов в автоколебательной реакции.

Рассмотрим две многочисленные взаимодействующие популяции, которые могут состоять из одного и того же или различных видов. Колонии одинаковых видов могут отличаться, например, местом обитания, или статусом больной/здоровый в эпидемии, или иными признаками. Естественно предположить, что в каждой популяции с разной интенсивностью, зависящей от условий среды (пища, природные катаклизмы и др.) индивиды могут рождаться, умирать и мигрировать (либо заболевать и выздоравливать, если две популяции рассматривать как один и тот же вид, подверженный эпидемии).

Пусть в начальный момент времени размеры популяций равны

$x_0 = [X_1(0), X_2(0)]^T$, а $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]^T$ – размеры популяций в момент времени t, b_1, b_2 – удельные коэффициенты рождаемости, а d_1, d_2 – смертности в первой и второй популяции, m_{12}, m_{21} – коэффициенты перехода из одной популяции в другую. Для географически изолированных популяций m_{12} представляет миграцию из первой популяции во вторую, а m_{21} соответственно из второй в первую. Записывая вероятности возможных изменений в рассматриваемых популяциях, вычисляя математическое ожидание, ковариацию, получим дискретную модель, и переходя от нее к непрерывной, приходим к системе стохастических дифференциальных уравнений Ито (подробнее см. Allen E.J. Modeling with Ito Stochastic Differential – Springer, 2007, 230 p.)

$$dX(t) = \mu(t, X(t))\,dt + B(t, X(t))\,dW(t), \qquad (1)$$

$$X(0) = x_0,$$

где $W(t) = [W_1(t), W_2(t)]^T$ – винеровский процесс, формальный дифференциал которого $dW(t)$ понимается в форме Ито, а уравнения системы (1) следует рассматривать в интегральной форме.

$$\mu(t, X_1, X_2) = \begin{pmatrix} b_1 X_1 - d_1 X_1 - m_{12} X_1 + m_{21} X_2 \\ b_2 X_2 - d_2 X_2 - m_{21} X_2 + m_{12} X_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a+\omega & b \\ b & c+\omega \end{pmatrix},$$

где $\omega = \sqrt{ac - b^2}$, $d = \sqrt{a + c + 2\omega}$, $a = d_1 X_1 + m_{12} X_1 + m_{21} X_2 + b_1 X_1$,
$b = -m_{12} X_1 - m_{21} X_2$,
$c = m_{12} X_1 + d_2 X_2 + b_2 X_2 + m_{21} X_2$.

Оказывается, система стохастических дифференциальных уравнений вида (1) может описывать динамику концентраций реагирующих веществ в автоколебательных реакциях. Предположим, что имеются три химических вещества S_1, S_2 и S_3, взаимодействующие через молекулярные столкновения или спонтанно. Пусть $x_0 = [X_1(0), X_2(0), X_3(0)]^T$ – начальное число молекул реагентов S_1, S_2 и S_3, $X(t) = [X_1(t), X_2(t), X_3(t)]^T$ – число молекул веществ в момент времени t; μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4 – постоянные. Записывая вероятности возможных реакций, вычисляя математическое ожидание, ковариацию, записываю дискретную модель, и переходя от нее к непрерывной, также приходим к системе стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (1). Здесь $W(t) = [W_1(t), W_2(t), W_3(t)]^T$ – винеровский процесс, формальный дифференциал которого $dW(t)$ понимается в форме Ито.

$$\mu = \begin{pmatrix} -\mu_1 X_1 X_2 + \mu_2 X_3 + \mu_3 X_2^2 X_3 - \mu_4 X_1^2 \\ -\mu_1 X_1 X_2 + \mu_2 X_3 - \mu_3 X_2^2 X_3 + \mu_4 X_1^2 \\ \mu_1 X_1 X_2 - \mu_2 X_3 - \mu_3 X_2^2 X_3 / 2 + \mu_4 X_1^2 / 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -(\mu_1 X_1 X_2)^{1/2} & (\mu_2 X_3)^{1/2} & 2(\mu_3 X_2^2 X_3 / 2)^{1/2} & -2(\mu_4 X_1^2 / 2)^{1/2} \\ -(\mu_1 X_1 X_2)^{1/2} & (\mu_2 X_3)^{1/2} & -2(\mu_3 X_2^2 X_3 / 2)^{1/2} & 2(\mu_4 X_1^2 / 2)^{1/2} \\ (\mu_1 X_1 X_2)^{1/2} & -(\mu_2 X_3)^{1/2} & -(\mu_3 X_2^2 X_3 / 2)^{1/2} & (\mu_4 X_1^2 / 2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Частным случаем модели (1) является стохастическая модель Лотки-Вольтерра, так же описывающая колебание концентраций реагирующих веществ (динамику численности конкурирующих видов) в среде со случайным возмущением

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} x_1(t) = (k_1 + a_1 x_2(t)) x_1(t) + \sigma_1 x_1(t) \xi_1(t), \\ \dfrac{d}{dt} x_2(t) = (k_2 + a_2 x_1(t)) x_2(t) + \sigma_2 x_2(t) \xi_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

где $x_1(t), x_2(t)$ – численность популяций (концентрации реагирующих веществ), k_1, k_2 – коэффициенты рождаемости (повышения концентраций реагентов), a_1, a_2 – коэффициенты гибели (снижения концентрации реагентов), $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – случайные процессы, которые при определенных условиях проживания конкурирующих видов (течения химических реакций), могут считаться независимыми гауссовскими белыми шумами.

Второй класс моделей описывает колебание упругой струны под действием случайной внешней силы, которое можно записать с помощью первой краевой задачи для волнового уравнения со случайной внешней силой в виде шума с начальными и граничными условиями

$$\begin{gathered} u_{tt}^{//}(t,x) = u_{xx}^{//}(t,x) + x(\varepsilon_g W(t) + \sin \pi t) + \varepsilon_f \sin x * W^{/}(t), \quad x \in [0,1], \quad t > 0, \\ u(0,x) = x(1-x), \quad u_t^{/}(t,x)\big|_{t=0} = \cos x, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

и аналогичной задачи колебания прямоугольной мембраны

$$\begin{gathered} u_{tt}^{//}(t,x,y) = u_{xx}^{//}(t,x,y) + u_{yy}^{//}(t,xy) + xy(\varepsilon_g W(t) + \sin \pi t) + \varepsilon_f \sin(\pi(x+y)) * W^{/}(t), \\ x \in [0,1], \quad y \in [0,1], \quad G = [0,1] \times [0,1], \quad t > 0, \\ u(0,x,y) = \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi y}{2}, \quad u_t^{/}(t,x,y)\big|_{t=0} = 0, \quad u(t,x,y)\big|_{x,y \in \partial G} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

а также задачи о колебании бесконечной струны под действием случайной внешней силы

$$u''_{tt}(t,x) = u''_{xx}(t,x) + g(t,x,W(t)) + f(t,x,W(t)) * W'(t),$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad u'_t(t,x)\Big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in R^1, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

и

$$u''_{tt}(t,x) = \Delta u(t,M) + g(t,M,W(t)) + f(t,M,W(t)) * W'(t),$$
$$u(0,M) = u_0(M), \quad u'_t(t,M)\Big|_{t=0} = v_0(M), \quad M(x,y,z) \in R^3, \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

Здесь $g(t,x,v), f(t,x,v), g(t,M,v), f(t,M,v)$ – детерминированные функции, гладкие по своим переменным, формальная производная винеровского процесса $W'(t)$ понимается в смысле Стратоновича, а сами уравнения (3)–(6) – в интегральной форме, Δ – оператор Лапласа, $\varepsilon_g, \varepsilon_f$ – константы, характеризующие степень влияния случайного воздействия на систему.

Глава 2. Разработка аналитического аппарата, необходимого для решения поставленных задач.

Данный раздел посвящен аналитическому исследованию СДУ с многомерным винеровским процессом, систем таких СДУ, их детерминированных аналогов, а также СДУ в частных производных гиперболического типа.

В § **2.1** приводятся основные определения и понятия стохастического исчисления и теории симметричных интегралов. Пусть $W(t) = W(t,\omega)$, $W(0) = 0$, $t \in [0,+\infty)$, – стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, F, (F_t), P)$. Вводятся в простейшем случае определения стохастических интегралов Ито и Стратоновича и формула Ито, описывающая связь этих двух интегралов.

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито: $dy(t) = \sigma(t, y(t))dW(t) + b(t, y(t))dt, \quad t \geq 0,$ с начальным условием $y(0) = y_0$. Приводятся определения решений СДУ, теоремы о существовании и единственности решений, явные формулы решений для некоторых классов СДУ.

Вводятся основные понятия, связанные с симметричным интегралом, который является детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича. Пусть $X(s)$, $s \in [0,\infty)$, – произвольная непрерывная функция. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leq t_1^{(n)} \leq \ldots \leq t_k^{(n)} \leq \ldots \leq t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$ и $\lambda_n = \max_k \left| t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s), s \in [0,t]$ обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $[\Delta t_k^{(n)}] = [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. Симметричным интегралом называется

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s)) ds\, \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$.

Приводятся формулы для вычисления симметричного интеграла. Рассматриваются СДУ с многомерным винеровским процессом и их детерминированные аналоги, построенные на основе симметричного интеграла. Предлагается метод, позволяющий свести решение такого уравнения к решению цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В **§2.2** приводятся основные теоретические результаты о решении систем СДУ с многомерным винеровским процессом, с помощью которых описываются исследуемые в работе модели. Выделен класс систем, допускающий полностью явное аналитическое решение. Рассматривается система СДУ в форме Стратоновича вида

$$\begin{cases} \eta_1(t) - \eta_2(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^t a_{1k}(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) * dW_k(s) + \int_0^t b_1(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) ds, \\ \dots \\ \eta_n(t) - \eta_n(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^t a_{nk}(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) * dW_k(s) + \int_0^t b_n(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) ds, \end{cases} \tag{7}$$

где $(W_1(s), \dots, W_{m-1}(s))$ – многомерный винеровский процесс с независимыми компонентами. Предполагается, что условие Липшица и условие линейного роста, обеспечивающие существование и единственность решения СДУ, выполнены, то есть существует положительная константа K такая, что для всех $s \in [0, t]$ и $y, \widetilde{y} \in R^{m-1}$, $j = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left| a_{jk}(s, y) - a_{jk}(s, \widetilde{y}) \right|^2 + \left| b_j(s, y) - b_j(s, \widetilde{y}) \right|^2 \le K \left| y - \widetilde{y} \right|^2, \quad \sum_{k=1}^{m-1} \left| a_{jk}(s, y) \right|^2 + \left| b_j(s, y) \right|^2 \le K \left(1 + |y|^2 \right), \tag{8}$$

а коэффициенты системы (7) удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_l} a_{jk}(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) \cdot a_{li}(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \eta_q} a_{ji}(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)) \cdot a_{qk}(s, \eta_1(s), \eta_2(s), \dots, \eta_n(s)),$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\eta_l}b_j(s,\eta_1(s),\eta_2(s),...,\eta_n(s))\cdot a_{li}(s,\eta_1(s),\eta_2(s),...,\eta_n(s))=$$

$$=\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\eta_q}a_{ji}(s,\eta_1(s),\eta_2(s),...,\eta_n(s))\cdot b_q(s,\eta_1(s),\eta_2(s),...,\eta_n(s))+\frac{\partial}{\partial s}a_{ji}(s,\eta_1(s),\eta_2(s),...,\eta_n(s)), \tag{9}$$

где $j,l,q=1,...,n;\ \ i,k=1,...,m-1.$

Теорема 1. *Если система СДУ (7), удовлетворяет условиям (8) и (9), то ее решение представляется в виде* $\eta_i(s)=\varphi_i(s,W_1(s),...,W_{m-1}(s)),\quad i=1,2,...,n,$ *где* $\varphi_i(s,v_1,...,v_{m-1})$ *– гладкие случайные функции, и удовлетворяет системе уравнений в полных дифференциалах*

$$\begin{cases} d\varphi_i(s,\bar v)=\sum_{k=1}^{m-1}a_{ik}(s,\varphi_1(s,\bar v),...,\varphi_n(s,\bar v))dv_k+b_i(s,\varphi_1(s,\bar v),...,\varphi_n(s,\bar v))\,ds,\\ \varphi_i(0,W_1(0),...,W_{m-1}(0))=\eta_i(0),\quad i=1,...,n,\end{cases}$$

где $\bar v\in R^{m-1}$.

В условиях этой теоремы винеровский процесс $W(s)$ можно заменить на произвольную непрерывную функцию неограниченной вариации $X(s)$, утверждение теоремы останется справедливым.

В качестве иллюстративного примера, для системы СДУ

$$\begin{cases}\eta_1(t)-\eta_1(0)=-\int_0^t\frac{s^2+\eta_1^2(s)}{s\cdot\eta_2(s)+X(s)\cdot\eta_1(s)}*dX(s)+\int_0^t\frac{\eta_1(s)\cdot\eta_2(s)-X(s)\cdot s}{s\cdot\eta_2(s)+X(s)\cdot\eta_1(s)}ds,\\ \eta_2(t)-\eta_2(0)=\int_0^t\frac{\eta_1(s)\cdot\eta_2(s)-X(s)\cdot s}{s\cdot\eta_2(s)+X(s)\cdot\eta_1(s)}*dX(s)-\int_0^t\frac{\eta_2^2(s)+X^2(s)}{s\cdot\eta_2(s)+X(s)\cdot\eta_1(s)}ds,\\ X(0)=1,\quad\eta_1(0)=1,\quad\eta_2(0)=0,\end{cases}$$

где первый интеграл в правой части уравнений понимается как симметричный по произвольной непрерывной функции неограниченной вариации $X(s)$; найдено точное решение

$$\eta_1(s)=\frac{1+\sqrt{1-4X^2(s)\cdot s^2}}{2X(s)},\quad\eta_2(s)=\frac{-2s\cdot X^2(s)}{1+\sqrt{1-4X^2(s)\cdot s^2}}.$$

В **§2.3** изучаются СДУ в частных производных, с помощью которых описываются исследуемые в работе модели колебания струны и мембраны.

Рассматривается уравнение в частных производных следующего вида

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x)=F_1\left(t,x,X(t),u(t,x),\frac{\partial}{\partial t}u(t,x),\frac{\partial}{\partial x_1}u(t,x),...,\frac{\partial^k}{\partial_{x_1}^{k_1}...\partial_{x_n}^{k_n}}(t,x),...\right)+$$
$$+F_2\left(t,x,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right)*X^{/}(t), \tag{10}$$

где $k_1+...+k_n=k\le m$, в области $(s,x)\in R^+\times R^n$, $X^{/}(t)$ есть формальная производная в смысле симметричного интеграла, а уравнение (10) понимается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}u(0,x)=\int_0^t F_1\left(s,x,X(s),u(s,x),\frac{\partial}{\partial s}u(s,x),\frac{\partial}{\partial x_1}u(s,x),...,\frac{\partial^k}{\partial_{x_1}^{k_1}...\partial_{x_n}^{k_n}}(s,x),...\right)ds+$$

$$+\int_0^t F_2\left(s,x,\frac{\partial}{\partial s}u(s,x)\right)*dX(s),$$

где второй интеграл в правой части – симметричный интеграл по функции $X(s)$.

Решением уравнения (10) называется функция $u(t,x)$, такая, что, если ее подставить вместе со своими производными в уравнение (10), то, во-первых, имеют смысл интегралы в правой части уравнения, и, во-вторых, она обращает уравнение (10) в тождество.

Решение ищется в виде $u(t,x)=\int_0^t \varphi(s,x,X(s))ds+V(x)$, в классе функций имеющих непрерывные частные производные u'_s, u'_v и непрерывные частные производные по переменным $x_1,...,x_n$ до m-го порядка включительно.

Теорема 2. *Функция* $u(t,x)=\int_0^t \varphi(s,x,X(s))ds+V(x)$, *из приведенного выше класса функций является решением уравнения (10) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет паре соотношений:*

$$\frac{\partial}{\partial v}\varphi(s,x,v)=F_2(s,x,\varphi(s,x,v)),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,x,v)|_{v=X(s)}=F_1\left(s,x.X(s),u(s,x),\frac{\partial}{\partial s}u(s,x),\frac{\partial}{\partial x_1}u(s,x),...,\frac{\partial^k}{\partial_{x_1}^{k_1}...\partial_{x_n}^{k_n}}u(s,x),...\right).$$

Опираясь на эту теорему, для решения задачи Коши колебания бесконечной струны под действием случайной внешней силы (5) получен аналог формулы Даламбера

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\big(u_0(x+t)+u_0(x-t)\big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}v_0(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}g(\tau,\xi,W(\tau))d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t F(s,x,W(s))ds-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}F(0,\xi,W(0))d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\int_0^\tau F_{\xi\xi}^{//}(y,\xi,W(y))dyd\xi d\tau, \qquad (11)$$

а для решения задачи Коши (6) – аналог формулы Кирхгофа

$$
\begin{aligned}
u(t,M) = {} & \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\iint_S \bigl(u_0(x+t\xi, y+t\eta, z+t\zeta)\bigr)ds\right) + \frac{t}{4\pi}\iint_S \bigl(v_0(x+t\xi, y+t\eta, z+t\zeta)\bigr)ds + \\
& + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|MM'|\le t} \frac{1}{|M'M|}\, g\bigl(t-|M'M|, M', W(t-|M'M|)\bigr)dx'dy'dz' - \\
& - \frac{t}{4\pi}\iint_S F\bigl(0, x+t\xi, y+t\eta, z+t\zeta, W(0)\bigr)ds + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|MM'|} \frac{1}{|M'M|}\left(\int_0^{t-|M'M|} \Delta F(\theta, M', W(\theta))d\theta\right)dx'dy'dz',
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $F(t,x,v)$ – первообразная функции $f(t,x,v)$ по переменной v .

При $f(t,x,v)\equiv 0$ задачи (5), (6) превращаются в классические, и формулы (11), (12) совпадают с классической формулой Даламбера и Кирхгофа соответственно. Таким образом, аналоги формул Даламбера и Кирхгофа (11), (12) являются ее обобщением и подходят для нахождения решения как классической задачи Коши для волнового уравнения, так и стохастической.

Рассматривается первая краевая задача для СДУ в частных производных гиперболического типа

$$
\begin{gathered}
u''_{tt}(t,x) + 2\alpha u'_t(t,x) + \beta u(t,x) - \boldsymbol{A}u = g(t,x,W(t)) + f(t,x,W(t)) * W'(t), \\
x \in \Gamma \subset R^n,\ t > 0, \\
u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(t,x)\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \overline{\Gamma}, \\
u(t,x)\big|_{x\in\partial\Gamma} = \mu(t,x)\big|_{x\in\partial\Gamma}, \quad t \ge 0,
\end{gathered}
\tag{13}
$$

где $\alpha,\ \beta \in R$, $\boldsymbol{A} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,\omega)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(t,x,\omega)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ – эллиптический оператор второго порядка, в котором $a_{ij}(t,x,\omega)$ и $d_i(t,x,\omega)$ – предсказуемые гладкие функции, матрица $\{a_{ij}(t,x,\omega)\}_{i,j=1}^{n}$ с $P=1$ положительно определена, формальная производная винеровского процесса $W'(t)$ понимается в смысле Стратоновича, а функции $g(t,x,v), f(t,x,v)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка по каждому аргументу. Показано, что решение задачи (13) представляется в виде $u(t,x) = \int\limits_0^t F(s,x,W(s))ds + \widetilde{c}(t,x),$ где $F(s,x,v)$ – первообразная функции $f(s,x,v)$ по переменной v , а $\widetilde{c}(t,x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \tilde{c}_{tt}^{//}(t,x) + 2\alpha\tilde{c}_t^{/}(t,x) + \beta\tilde{c}(t,x) - \boldsymbol{A}\tilde{c}(t,x) = M(t,x,W(t)), \quad x \in \Gamma \subset R^n, \quad t > 0, \\ \tilde{c}(0,x) = u_0(x), \quad \tilde{c}_t^{/}(t,x)\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \overline{\Gamma}, \\ \tilde{c}(t,x)\big|_{x\in\partial\Gamma} = -\int\limits_0^t F(s,x,W(s))\big|_{x\in\partial\Gamma} ds + \mu(t,x)\big|_{x\in\partial\Gamma}, \quad t \ge 0, \end{cases}$$

где $M(s,x,W(s)) = -F_s^{/}(s,x,W(s)) - 2\alpha F(s,x,W(s)) - \beta\int\limits_0^s F(\tau,x,W(\tau))d\tau + \boldsymbol{A}\left(\int\limits_0^s F(\tau,x,W(\tau))d\tau\right) +$

$+ g(s,x,W(s))$. Таким образом, решение первой краевой задачи для СДУ в частных производных гиперболического типа (13) сводится к решению классической первой краевой задачи, содержащей в правой части уравнения и в граничных условиях случайные функции.

Глава 3. Численно–аналитическое решение и моделирование поставленных задач.

В **§3.1** приведен алгоритм моделирования стандартного винеровского процесса.

В **§3.2** рассматривается стохастическая модель Лотки-Вольтерра (2), описывающая динамику численности двух конкурирующих видов (концентраций двух реагирующих химических веществ в автоколебательной реакции) в среде со случайными возмущениями. Впервые найден ее первый интеграл

$$b_2\left(\ln\frac{x_1}{x_{10}} - \sigma_1 W_1(t)\right) + a_2\left(x_1 - e^{\sigma_1 W_1(t)}x_{10}\right) = b_1\left(\ln\frac{x_2}{x_{20}} - \sigma_2 W_2(t)\right) + a_1\left(x_2 - e^{\sigma_2 W_2(t)}x_{20}\right),$$

где $b_1 = k_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2, \quad b_2 = k_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2$.

Показано, что решение стохастической системы Лотки-Вольтерра (2) представляется в виде $x_1(t) = e^{\sigma_1 W_1(t)}c_1(t), \quad x_2(t) = e^{\sigma_2 W_2(t)}c_2(t)$ и находится из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$c_1^{/}(t) = c_1(t)\left(k_1 + a_1 e^{\sigma_2 W_2(t)}c_2(t) + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right), \quad c_2^{/}(t) = c_2(t)\left(k_2 + a_2 e^{\sigma_1 W_1(t)}c_1(t) + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right). \qquad (14)$$

Для численного решения стохастической системы Лотки-Вольтерра (2) предлагается следующий алгоритм:

Алгоритм.

1. Моделируются две независимые траектории броуновского движения $W_1(t)$, $W_2(t)$;

2. С помощью метода, описанного во второй главе работы, выводится система уравнений (14). В этой системе отсутствуют слагаемые в виде стохастических интегралов, что позволяет применить классические численные методы для построения ее решения, например, метод Эйлера. Последнее связано с тем, что

решение этой системы $c_1(t), c_2(t)$ имеет непрерывную производную только первого порядка

$$c_1^{i+1} = c_1^i + \tau\, c_1^i (k_1 + a_1 e^{\sigma_2 W_2^i} c_2^i + \frac{1}{2}\sigma_1^2), \quad c_2^{i+1} = c_2^i + \tau\, c_2^i (k_2 + a_2 e^{\sigma_1 W_1^i} c_1^i + \frac{1}{2}\sigma_2^2),$$

где $i = 1,..., N$, $\tau = T / N$; W_1^i, W_2^i – аппроксимация $W_1(t), W_2(t)$ в узлах i расчетной сетки;

3. С помощью соотношений $x_1(t) = e^{\sigma_1 W_1(t)} c_1(t)$, $x_2(t) = e^{\sigma_2 W_2(t)} c_2(t)$ строится решение стохастической системы Лотки-Вольтерра (2).

Используя правило Рунге, оценена погрешность численных результатов.

В **§3.3** рассматривается первая краевая задача вида (3), которая описывает колебания закрепленной упругой струны под действием случайной внешней силы. Решение уравнения (3) имеет вид $u(t,x) = \int_0^t \varepsilon_f \sin x \cdot W(s) ds + \tilde{c}(t,x)$, где неизвестная функция $\tilde{c}(t,x)$ является решением первой краевой задачи

$$\begin{gathered}\tilde{c}_{tt}^{//}(t,x) = \tilde{c}_{xx}^{//}(t,x) + x(\varepsilon_g W(t) + \sin \pi\, t) + \varepsilon_f \sin x \int_0^t W(s) ds, \quad x \in [0,1], \quad t > 0, \\ \tilde{c}(0,x) = x(1-x), \quad \tilde{c}_t^{/}(t,x)\Big|_{t=0} = \cos x, \quad \tilde{c}(t,0) = 0, \quad \tilde{c}(t,1) = 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Для решения первой краевой задачи вида (3) предлагается следующий алгоритм:

Алгоритм.

1. Моделируется траектория броуновского движения $W(t)$;

2. С помощью метода, описанного во второй главе текущей работы, приходим к начально-краевой задаче (15), в которой отсутствуют слагаемые в виде стохастических интегралов, что позволяет применить классические численные методы для построения ее решения, например, явную трехточечную схему

$$\frac{1}{\tau^2}(\tilde{c}_{n+1,m} - 2\tilde{c}_{n,m} + \tilde{c}_{n-1,m}) = \frac{1}{h^2}(\tilde{c}_{n,m+1} - 2\tilde{c}_{n,m} + \tilde{c}_{n.m-1}) + f_{n,m}, \quad n = 0,..., N, \quad m = 1,..., M-1$$

,

где τ – шаг по времени, а h – по пространству, $f_{n,m} = x_m(\varepsilon_g W_n + \sin \pi t_n) + \varepsilon_f \sin x_m I_n$, I_n – аппроксимация интеграла $\int_0^{t_n} W(s) ds$.

3. С помощью соотношения $u(t,x) = \int_0^t \varepsilon_f \sin x \cdot W(s) ds + \tilde{c}(t,x)$ строится решение исходной первой краевой задачи (3).

В **§3.4** предлагается численно-аналитический метод решения первой краевой задачи (4) для описания вибрации закрепленной прямоугольной мембраны под действием случайной внешней силы. Решение уравнения (4) имеет вид $u(t,x)=\varepsilon_f \sin\pi(x+y)\cdot\int_0^t W(s)ds+\widetilde{c}(t,x,y)$, где неизвестная функция $\widetilde{c}(t,x)$ является решением первой краевой задачи

$$
\begin{gathered}
\widetilde{c}_{tt}^{//}(t,x,y)=\widetilde{c}_{xx}^{//}(t,x,y)+\widetilde{c}_{yy}^{//}(t,x,y)+M(t,x,y,W(t)),\\
x\in[0,1],\quad y\in[0,1],\quad G=[0,1]\times[0,1],\quad t>0,\\
\widetilde{c}(0,x,y)=\sin\pi x\sin\frac{\pi y}{2},\quad \widetilde{c}_t^{/}(t,x,y)\big|_{t=0}=0,\\
\widetilde{c}(t,x,y)\big|_{x,y\in\partial G}=-\int_0^t F(s,x,y,W(s))\big|_{x,y\in\partial G}ds,
\end{gathered}
\tag{16}
$$

где $F(s,x,y,W(s))=\varepsilon_f\sin\pi(x+y)W(s)$,

$M(t,x,y,W(t))=-2\pi\varepsilon_f\sin\pi(x+y)\int_0^s W(\tau)d\tau+xy(\varepsilon_g W(t)+\sin\pi t)$.

Для решения первой краевой задачи вида (4) предлагается следующий алгоритм:

Алгоритм.

1. Моделируется траектория броуновского движения $W(t)$;

2. С помощью метода, описанного во второй главе текущей работы, приходим к начально-краевой задаче (16), в которой отсутствуют слагаемые в виде стохастических интегралов, что позволяет применить классические численные методы для построения ее решения, например, явную трехточечную схему

$$\widetilde{c}_{i,j}^{k+1}=r_x(\widetilde{c}_{i,j+1}^k+\widetilde{c}_{i,j-1}^k)+2(1-r_x-r_y)\widetilde{c}_{i,j}^k+r_y(\widetilde{c}_{i+1,j}^k+\widetilde{c}_{i-1,j}^k)-\widetilde{c}_{i,j}^{k-1}+\tau^2M_{i,j}^{k+1},$$

где $k=2,...,N_t$, $i,j=2,...,M-1$, τ – шаг по времени, а h – по пространству, $r_x=\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$, $r_y=\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}$, $M_{i,j}^k$ – аппроксимация функции $M(t,x,y,W(t))$;

3. С помощью соотношения $u(t,x)=\varepsilon_f\sin\pi(x+y)\cdot\int_0^t W(s)ds+\widetilde{c}(t,x,y)$, строится решение исходной первой краевой задачи (4).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработан новый способ численного моделирования колебательных процессов в среде со случайными возмущениями, которые описываются систе-

мами СДУ, в частности стохастической системы Лотки-Вольтерра динамики численности конкурирующих видов (концентраций реагентов в автоколебательной реакции) под действием случайных возмущений. Метод заключается в том, что, опираясь на аналитические результаты работы, исходная задача сводится к системе обычных дифференциальных уравнений в полных дифференциалах, где в качестве коэффициентов присутствует винеровский процесс, и которая решается классическими численно-аналитическими методами. Используя правило Рунге, оценена погрешность численных результатов;

2. Разработан новый способ численного моделирования колебательных процессов в среде со случайными возмущениями, которые описываются начально-краевой задачей для СДУ в частных производных гиперболического типа, а именно, колебаний упругой струны и мембраны под действием случайных возмущений. Метод заключается в том, что, опираясь на аналитические результаты работы, исходная стохастическая начально-краевая задача сводится к классической начально-краевой задаче, где в качестве коэффициентов или краевых условий присутствует винеровский процесс, что позволяет воспользоваться классическими численно-аналитическими методами для ее решения;

3. Предложен новый аналитический метод решения широкого класса систем СДУ, включающий в себя, в частности, стохастическую систему Лотки-Вольтерра. Впервые найден первый интеграл последней в виде функции, связывающей численности конкурирующих видов (концентрации реагентов в автоколебательных реакциях). Предложены аналоги формул Даламбера и Кирхгофа для решения задачи Коши колебаний бесконечной струны под действием случайной внешней силы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. О явных формулах для решения стохастических интегральных уравнений и их детерминированных аналогов / Захарова О.В. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2005. Т. 12, выпуск 3, С. 857.

2. О решении некоторых классов стохастических дифференциальных и интегральных уравнений и их детерминированных аналогов / Насыров Ф.С., Захарова О.В., Крымская М.В. // Вестник УГАТУ, 2006, Т.7, №1, С. 137–143.

3. Явные формулы для решения стохастических интегральных уравнений типа Вольтера / Захарова О.В. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2007, Т. 14, выпуск 5, С. 831.

4. О решении одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений / Захарова О.В. // Известия ВУЗов. Математика, 2009, № 6, С. 3–9.

5. Аналог формулы Даламбера для решения задачи Коши колебания бес-

конечной струны под действием случайной внешней силы / Захарова О.В. // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009, Т. 16, выпуск 2, С. 261–262

В других изданиях

6. О явных формулах для решения детерминированных аналогов стохастических интегральных уравнений в форме Стратоновича / Захарова О.В. // Материалы «5-ой региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике» – Уфа: РИО БашГУ, 2005, С. 15.

7. Об одном методе решения стохастических дифференциальных уравнений и их детерминированных аналогов / Захарова О.В. // Труды «37-й Региональной молодежной конференции». – Екатеринбург: УрО РАН, 2006, С. 191–194.

8. О решении детерминированных аналогов систем стохастических дифференциальных уравнений / Захарова О.В. // Материалы 13-й Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва: издательство Московского университета, 2006, Т. 4, С. 70–71.

9. О решении детерминированных аналогов систем стохастических интегральных уравнений / Захарова О.В. // Сборник трудов участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Ростов-на-Дону, 2006, С. 230–231.

10. О решении задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа / Захарова О.В. // Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». М.: Издательство СП «МЫСЛЬ», 2008, 1 электрон. Опт. Диск (CD-ROM); 12 см.

11. О решении задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа / Захарова О.В. // В сборнике трудов участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, Ростов-на-Дону, 2008, С. 223–224с.

12. О стохастической модели Лотки-Вольтерра / Захарова О.В. // Материалы докладов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». М.: «МАКС Пресс», 2009, 1 электрон. Опт. Диск (CD-ROM); 12 см.

Соискатель ____________________________ О.В. Захарова

ЗАХАРОВА Ольга Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ
В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 11.11.2009. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр.-отт 1,0. Уч.-изд.л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 556

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12