На правах рукописи

УРАЗБАХТИНА Лилия Зинфировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДАМИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Уфа – 2009

Работа выполнена на кафедре математики в ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф.
ХАБИРОВ Салават Валеевич

Официальные оппоненты — д-р физ.-мат. наук, проф., в.н.с. Института математики с ВЦ УНЦ РАН
ЖИБЕР Анатолий Васильевич

канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры Высшей математики Новосибирского государственного технического университета
ЧИРКУНОВ Юрий Александрович

Ведущая организация — **Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск**

Защита диссертации состоится «15» декабря 2009 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. К. Маркса, д. 12, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан «12» ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ. - мат. наук, проф. **БУЛГАКОВА Г. Т.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Настоящая диссертационная работа посвящена развитию методов к классификации, построению, исследованию математических подмоделей некоторых физических процессов методами группового анализа. Разработанные методы проведены на подмоделях, описывающих движение жидкости или металлов при больших давлениях (до 10^{14} Pa) и высоких температурах (до 10^{6} град).

Математическая модель движения сжимаемой жидкости – уравнения газовой динамики. Главная трудность в описании газодинамических процессов – это их нелинейность. Отсюда и идет многообразие методов анализа и конкретных закономерностей, которые не укладываются в какую-либо одну стандартную схему. Краевые задачи для квазилинейных систем дифференциальных уравнений в многомерном пространстве решать сложно. Теоремы существования, единственности и устойчивости доказаны лишь в простых случаях, поэтому и численные методы оказываются не обеспеченными надлежащим обоснованием. Уравнениям газовой динамики удовлетворяет множество процессов и явлений, но конкретно заданное явление может описываться упрощенной моделью – подмоделью. Например, академик М. А. Лаврентьев предложил описывать кумулятивные струи, возникающие при пробивании струей брони, с помощью потенциальных движений жидкости. Устойчивость этой струи описывается подмоделями сжимаемой жидкости.

К настоящему времени разработан хорошо себя зарекомендовавший способ регулярного упрощения моделей – групповой анализ уравнений газовой динамики, основанный на симметрийных (групповых) свойствах уравнений относительно некоторых преобразований. Групповой анализ является единственным общим методом построения точных решений дифференциальных уравнений независимо от их типа. Каждая упрощенная подмодель описывает класс явлений, а точное решение подмодели – происходящий процесс (модель).

Задача о групповом свойстве уравнений газовой динамики решена в работах Л. В. Овсянникова. Начало группового анализа положено академиком Л. В. Овсянниковым и продолжается его учениками и последователями: В. В. Пухначевым, В. К. Андреевым, С. В. Хабировым, С. В. Головиным, Е. В. Мамонтовым, А. П. Чупахиным, А. А. Талышевым, С. В. Мелешко, Ю. А. Чиркуновым, А. А. Черевко и другими. Ими проводятся исследования по ГНТП **«Подмодели»**.

Актуальность работы заключается в моделировании движения сжимаемой жидкости упрощенными моделями – подмоделями. В процессе моделирования получены новые точные решения уравнений газовой динамики, описывающих нестационарное движение сжимаемой жидкости.

Цель работы

Целью работы является развитие методов группового анализа для построения и исследования новых подмоделей, описывающих движение сжимаемой жидкости при больших давлениях и высоких температурах. Поставленная цель достигается в результате решения следующих задач.

1. Разработать способ понижения порядка подмоделей. Реализовать его на инвариантных подмоделях трехмерных подалгебр, для которых инвариантное решение ищется в виде решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Построить дифференциально – инвариантные подмодели для двух трехмерных подалгебр. Исследовать вопрос о редукции дифференциально – инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям.
3. Выписать все инвариантные подмодели с линейным полем скоростей для четырехмерных подалгебр, у которых инвариантное решение ищется в виде решения систем алгебраических уравнений.

4. Дать физическую интерпретацию полученных точных решений инвариантных подмоделей.

Методы исследования. Аналитические результаты получены с помощью методов группового анализа, теории дифференциальных уравнений.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Способ понижения порядка инвариантных подмоделей, основанный на использовании фактора нормализатора, а также использующий дополнительные интегралы, найденные по аналогии с нахождением интеграла Бернулли и интеграла закрутки.
2. Редукция дифференциально – инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям.
3. Аналитический метод нахождения решений инвариантных подмоделей с линейным полем скоростей, построенных на четырехмерных подалгебрах.

Научная новизна

1. Предложен способ понижения порядка инвариантных подмоделей, основанный на использовании фактора нормализатора, а также использующий дополнительные интегралы, найденные по аналогии с нахождением интеграла Бернулли и интеграла закрутки, позволяющий интегрировать подмодели.
2. Доказана редукция дифференциально – инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям.
3. Проведена классификация инвариантных подмоделей с линейным полем скоростей с обобщениями, позволяющими единым способом представить все решения, соответствующие целому классу подмоделей. Все проведенные в работе классификации выполнены для ранее не изученных подмоделей сжимаемой жидкости.

4. Предложенный способ полного приближенного интегрирования инвариантной подмодели основан на введении малого параметра, связанного с гиперзвуковым приближением, и отличается от известных способов получением интегрируемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теоретическая значимость

Разработанный способ понижения порядка инвариантных подмоделей трехмерных подалгебр, дает возможность полностью интегрировать системы, а также в некоторых случаях получать системы линейных дифференциальных уравнений. В ходе проведения классификации дифференциально – инвариантных подмоделей выяснилось, что разные инвариантные подмодели объединяются в одну дифференциально – инвариантную подмодель, тем самым расширяется возможность для решения более общих краевых задач. Доказано, что возможна редукция дифференциально – инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям.

Практическая значимость

Методы исследования и анализа подмоделей дают возможность решать задачи о процессах, происходящих при движении сжимаемой жидкости. Полученные точные решения можно использовать в качестве тестовых задач для численных методов. Проведена визуализация следующих процессов: сжатие выделенного сферического объема в отрезок; расширение выделенного сферического объема в эллипсоид с одним фиксированным размером; сжатие шара в эллипс; протекание жидкости через щель.

Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена строгостью доказательств полученных результатов.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

— 36-ая региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, УрО РАН, 2005 г.;
— 37-ая региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, УрО РАН, 2006 г.;
— III Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова, Абрау-Дюрсо, 2006 г.;
— 38-ая региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, УрО РАН, 2007 г.;
— Российская конференция «Механика и химическая физика сплошных сред», Бирск,2007 г.;
— 39-ая региональная молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, УрО РАН, 2008 г.;
— IV Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова, Абрау-Дюрсо, 2008 г.;
— Международная конференция «MOGRAN-13. Симметрии и точные решения дифференциальных и интегрально-дифференциальных уравнений», Уфа (Россия), 2009 г.;
— Семинар по математическому моделированию ИМ с ВЦ РАН под руководством д. ф.- м. н. А. В. Жибера, 2009 г.;
— Теоретический семинар института механики УНЦ РАН под руководством д. ф.-м. н. С. Ф. Урманчеева, 2009 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ [1]-[11]. Из них – 8 в виде статей (в том числе, 2 – в журналах из списка ВАК), 3 – в виде тезисов. Результаты докладывались на 8 конференциях, 2 семинарах.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, двенадцати параграфов, заключения, приложения и списка литературы, который содержит 60 наименований. Объем диссертации 144 страницы машинописного текста, включая 13 рисунков, 2 таблицы, приложение А.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описана структура диссертации, изложены ее основные результаты, дается обоснование актуальности работы, приведен обзор литературы по теме исследования, основные понятия и определения.

В работе рассматриваем уравнения газовой динамики (УГД)

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}+\nabla p=0,\quad \frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div}\vec{u}=0,\quad \frac{dS}{dt}=0 \tag{1}$$

со специальным уравнением состояния

$$p=B\rho^{\gamma}+F(S), \tag{2}$$

которое описывает движение жидкости и твердых тел при больших давлениях и высоких температурах. Здесь $\vec{u}$ - вектор скорости, ρ - плотность, p – давление, S – энтропия, B,γ – постоянные, $B\gamma>0, \gamma\neq 0,1$ (условие нормального газа), $d/dt=\partial_t+\vec{u}\cdot\nabla$.

УГД допускают 13-мерную алгебру Ли L_{13} с базисом операторов, записанным в декартовой системе координат

$$X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_z,\quad X_4=t\partial_x+\partial_u,\quad X_5=t\partial_y+\partial_v,$$

$$X_6=t\partial_z+\partial_w,\quad X_7=y\partial_z-z\partial_y+v\partial_w-w\partial_v,\quad X_8=z\partial_x-x\partial_z+w\partial_u-u\partial_w,$$

$$X_9=x\partial_y-y\partial_x+u\partial_v-v\partial_u,\quad X_{10}=\partial_t,\quad X_{11}=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z,$$

$$X_{12}=t\partial_t-\vec{u}\partial_{\vec{u}}-(\bar{\gamma}-2)\rho\partial_\rho-\bar{\gamma}p\partial_p,\quad X_{13}=\partial_p,\quad \text{где } \bar{\gamma}=2\gamma(\gamma-1)^{-1}.$$

Для алгебры L_{13} построена оптимальная система подалгебр (Хабиров С. В. Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики. Препринт института механики УНЦ РАН. Уфа. 1998. 33с.).

Первая глава посвящена вычислению дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. В первом параграфе даются основные определения. Дифференциальные инварианты находятся как решение системы дифференциальных уравнений:

$$\underset{\kappa}{\tilde{X}_\alpha} F = 0, \quad \alpha = 1 \ldots r,$$

где $\underset{\kappa}{\tilde{X}_\alpha}$ – продолженные на производные операторы базиса подалгебры, κ - порядок производных, входящих в продолжение.

Для любой подгруппы G^r существует конечный базис дифференциальных инвариантов, из которого любой дифференциальный инвариант этой подгруппы получается из инвариантов базиса с помощью конечного числа функциональных операций и операторов инвариантного дифференцирования (ОИД). В следующих параграфах описан алгоритм нахождения дифференциальных инвариантов и ОИД. Результаты вычислений сведены в таблицу приложения А. Таблица состоит из следующих элементов.

1. 24 серии двумерных подалгебр алгебры L_{13}. Для каждой подалгебры вычислен базис из 11 функционально независимых дифференциальных инвариантов первого порядка и по 4 оператора инвариантного дифференцирования.
2. 70 серий 3-х мерных подалгебр алгебры L_{13}. Вычислен базис из 10 функционально независимых дифференциальных инвариантов первого порядка и по 4 оператора инвариантного дифференцирования.
3. 113 серий 4-х мерных подалгебр алгебры L_{13}. Для каждой подалгебры вычислено 5 точечных инвариантов.

Полученная таблица лежит в основе построения подмоделей. Система УГД, записанная через инварианты подалгебры, называется подмоделью. Если из инвариантов подалгебры определяются все функции, то на ней можно строить инвариантные подмодели, иначе можно строить дифференциально – инвариантные подмодели. Представление решения подмодели получается следующим образом. Инварианты, зависящие от функций, назначим новыми функциями, зависящими от независимых переменных. Инвариантное решение – это решение инвариантной подмодели. Число инвариантов подалгебры, зависящих от независимых переменных определяет тип системы (системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы дифференциальных уравнений в частных производных, системы алгебраических уравнений). Далее в работе будут рассматриваться подмодели следующих видов.

- Инвариантные подмодели для трехмерных подалгебр, у которых из инвариантов определяются все функции. Инвариантное решение ищется в виде решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Дифференциально – инвариантные подмодели для трехмерных подалгебр, у которых из инвариантов не определяется одна функция, и, значит, подмодель представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных.
- Инвариантные подмодели для четырехмерных подалгебр, у которых из инвариантов определяются все функции. В этом случае подмодель представляет систему алгебраических уравнений.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. В пятом параграфе реализован способ понижения порядка инвариантных подмоделей, задаваемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, с помощью фактора нормализатора подалгебры и за счет дополнительных интегралов, не связанных с симметриями нормализатора. Дополнительные интегралы получаются эвристическим путем по аналогии с известными примерами. Рассмотрено 10 трехмерных подалгебр. Получено 3 подмодели, сводящиеся к уравнению Риккати, которое является интегрируемым при некоторых соотношениях на параметры подалгебры. Например, подмодель для **подалгебр** $3.3'$**,** $3.2'$ состоит из уравнения

$$-3a(s^2-\beta^2)p_{3s}=p_3^2+1-6a^2\beta^2+(2a^2\beta^2-1)\beta^2 s^{-2}, \qquad (3)$$

где a - постоянная подалгебры. Уравнение (3) является интегрируемым при выполнении соотношения $\sqrt{12}a\beta=1, B=-\beta^2$.

Для пяти подалгебр подмодели сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, системы для **подалгебр** $3.1'(c=0, b \neq 0)$ **и** $3.4'(c=0, b \neq 0)$ являются линейными:

$$w'_{2s} = (\frac{K_1}{s} - \frac{s}{(s^2-1)})w_2 + \frac{p_2}{(s^2-1)}, \quad p'_{2s} = (\frac{K_2}{(s^2-1)} - \frac{1}{d^2 s^2})w_2 - K_2 p_2 \frac{s}{(s^2-1)} + \frac{K_2}{s},$$

где K_1, K_2 - постоянные, w_2, p_2, s - инварианты подалгебры.

В §6 изучены две 3-х мерные **подалгебры** $3.2''$ **и** 3.18**.** Из инвариантов этих подалгебр не определяются все газодинамические функции. Поэтому на них можно строить дифференциально – инвариантные подмодели (ДИП).

Определение. Дифференциально – инвариантной подмоделью ранга $r + r_1$ называется представление уравнений газовой динамики как многообразия размерности $r + r_1$ в пространстве независимых дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка имеет размерность r. Для трехмерных подалгебр возможны ДИП пяти рангов: 2+0, 2+1, 2+2, 3+0, 3+1.

В §6.1 рассмотрена **подалгебра** $3.2''$. Инварианты подалгебры выражаются через плотность, что затрудняет доказательства теорем редукции. ДИП 2+0 объединяет в себе две инвариантные подмодели, соответствующие двум двумерным подалгебрам $< X_1, t_0^{-1}X_{12} - X_{10} - X_{13} >$ при $\varepsilon = 1$ и $< X_1, X_{10} + X_{13} >$ при $\varepsilon = 0$. ДИП ранга 3+0 – это новая подмодель. ДИП ранга 2+1 и 2+2 редуцируются к инвариантным подмоделям.

Инварианты **подалгебры** 3.18 выражаются через независимые переменные, что облегчает доказательства теорем редукции. В §6.2 доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. ДИП ранга 2+0 совпадает с инвариантной подмоделью на подалгебре, порожденной операторами

$$< X_{10} + P_0 X_{13}, \quad X_1 + X_{12} + \bar{\gamma} P_1 X_{13} >, \quad P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0,$$

где P_0, P_1 - произвольные постоянные.

Утверждение 1. ДИП ранга 2+0 допускает только оператор X_1.

Оператор X_1 в инвариантах подалгебры будет оператором растяжения. Параметры более общего растяжения примем за средние величины так, чтобы в ДИП 2+0 появился малый параметр ε. Решение системы будем искать в виде ряда по малому параметру (гиперзвуковое приближение):

$$\overline{u}_0 = \sum \vec{u}_{0k}\varepsilon^k, \rho_0 = \sum \rho_{0k}\varepsilon^k, \quad \varphi = \sum \varphi_{0k}\varepsilon^k, P_0 = \sum P_{0k}\varepsilon^k, \ k \geq 0.$$

Утверждение 2. Нулевое приближение системы является гиперзвуковым приближением газовых течений. Точное решение нулевого приближения имеет вид:

$$u_{00} = C_3 \exp(C_1 y), \quad v_{00} = C_1^{-1} u_{00}, \quad w_{00} = C_2^{-1} u_{00},$$

$$\rho_{00} = |u_{00}|^{\bar{\gamma}-2} C_1 C_2 \left[C_2' z - C_2' zy + C_4^{-4} C_4' - C_3^{-1} C_3'\right]^{-1}, \quad \varphi_{00} = |u_{00}|^{\bar{\gamma}} C_5 + B\rho^{\gamma}{}_{00},$$

где $C_i = C_i(l), i = \overline{1,5}; C_3 C_4 > 0, \quad u_{00} C_3 > 0, \quad u_{00} C_4 > 0$. Параметр l определяется из равенства $C_3 \exp(C_1 y) = C_4 \exp(C_2 z)$. При ε^m получены рекуррентные системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка. Правые части этих систем зависят от функций из предыдущих приближений. Решения систем могут быть найдены для любого m в квадратурах. В работе также найдено решение в квадратурах для первого приближения.

Теорема 2. ДИП ранга 3+0 редуцируется к инвариантной подмодели на подалгебре $X_1 + X_{12}$.

Теорема 3. ДИП ранга 2+1 редуцируется к ДИП 2+0.

Теорема 4. ДИП ранга 2+2 редуцируется к ДИП ранга 2+0.

Среди четырехмерных подалгебр имеется 31 подалгебра, на которой можно строить инвариантные подмодели с линейным полем скоростей. В §7 проинтегрирована 31 инвариантная подмодель с линейным полем скоростей. В этом случае представление решения для компонент скорости записывается в виде $\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t)$, где $A(t)$ - линейный оператор. Представления для функций p, ρ будем считать произвольными, т.е. рассмотрим частично инвариантное решение дефекта 2. Замечено, что для всех подалгебр выполняется равенство $A' + A^2 = 0$. Решение этого операторного равенства может быть 4 действительных видов с точностью до выбора системы координат:

$$\text{c1. } A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 t + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 t + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_3 t + 1} \end{pmatrix}, \qquad \text{c2. } A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda t + 1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(\lambda t + 1)^2} & \frac{\lambda}{\lambda t + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1 t + 1} \end{pmatrix},$$

$$\text{c3. } A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda t + 1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(\lambda t + 1)^2} & \frac{\lambda}{\lambda t + 1} & 0 \\ \frac{-t}{(\lambda t + 1)^3} & \frac{1}{(\lambda t + 1)^2} & \frac{\lambda}{\lambda t + 1} \end{pmatrix}, \quad \text{c4. } A = \begin{pmatrix} 2^{-1} d' d^{-1} & \beta d^{-1} & 0 \\ -\beta d^{-1} & 2^{-1} d' d^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\lambda t + 1} \end{pmatrix},$$

$$\beta \neq 0, \ d = (\alpha^2 + \beta^2) t^2 + 2\alpha t + 1.$$

Подставив представления решения в УГД, получаем две подмодели.

Подмодель I: $\vec{a} = \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 \neq 0, \ \vec{a}' + A^T \vec{a} = \vec{a} \operatorname{tr} A \left(1 + \frac{B\gamma^2}{\gamma - 1} R_0(t)\right),$

$$R_0' + \operatorname{tr} A \frac{B\gamma^2}{\gamma - 1} R_0^2 + \gamma \operatorname{tr} A R_0 = 0, \ R_1' + R_0 \vec{u}_0 \cdot \vec{a} + (\gamma - 1) \operatorname{tr} A R_1 = 0.$$

Искомые функции p, ρ имеют вид

$$s = \vec{a} \cdot \vec{x}, \ \ \rho = (R_0(t) s + R_1(t))^{1/(\gamma - 1)}, \ \ p = -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma R_0(t)} (R_0(t) s + R_1(t))^{\gamma/(\gamma - 1)} + p_0.$$

Подмодель II: $\vec{a} = \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = 0$.

Функции плотности и давления определяются по формулам

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\int \operatorname{tr} A dt\right), \ p = B\gamma \rho^\gamma + p_0, \ p_0, \rho_0 - \text{постоянные.}$$

В §8 приведена двухфазная модель течения жидкости. Для **подалгебры 4.60** в однофазном движении инвариантное решение существует лишь при значении параметра $\gamma = 1/3$. В двухфазной модели введены новые функции перетоков импульса $\vec{P}$, массы J и энергии E. Для подмодели подалгебры 4.60 они имеют вид

$$J = Mr^{-\alpha},\ \vec{P} = (P, Q, R),\ E = E_0 r^{\alpha} + MHr^{-\alpha} + E_1 r^{1-\alpha} H' F'^{-1},\ S = H(p - B\rho^{\gamma}),$$

где M, E_i, P, Q, R – произвольные постоянные, удовлетворяющие системе

$$(3\gamma + 1)\rho_0 V_0 = 2\gamma M, \quad U_0(\alpha\rho_0 V_0 + M) = P - 1, \quad \rho_0\left(V_0^2\alpha - W_0^2\right) + p_0 = Q - MV_0,$$

$$W_0\left(\rho_0 V_0(\alpha + 1) + M\right) = R,\ \rho_0^{-1} E_1 = U_0 + V_0\left(p_0 - B\rho_0^{\gamma}\right),$$

$$E_0\rho_0 + E_1 = \gamma(\gamma - 1)^{-1} MB\rho_0^{\gamma} + \vec{U}_0 \cdot \vec{P} - 2^{-1}\rho_0 M\left|\vec{U}_0\right|^2;$$

$U_0, V_0, W_0, \rho_0, p_0$ - постоянные инварианты. При $\gamma \neq -1/3$ постоянные M, E_0, E_1, P, Q, R определяются через постоянные $U_0, V_0, W_0, \rho_0, p_0$, которые могут быть произвольными.

В третьей главе дана физическая и геометрическая интерпретация некоторых точных решений УГД. Будем рассматривать только те точные решения, для которых возможно сжатие конечного объема в бесконечно малый объем. Все рассмотренные ниже точные решения описывают нестационарное трехмерное движение сжимаемой жидкости.

В §9 рассмотрено частное решение нулевого приближения ДИП 2+0 для подалгебры 3.18. Уравнения движения частиц в пространстве имеют вид

$$x = t_0 - t + x_{01},\ Cy = y_1 = t_0 - t + y_{01},\ z = z_{01} y_{01}^{-1}(t_0 - t + y_{01}),$$

где x_{01}, y_{01}, z_{01} - начальное положение частицы. Движение куба жидкости можно рассматривать как протекание через щель (ось x) (см. Рисунок 1). В результате происходит деформация куба. Минимальный объем $V_{min} = a^2 \dfrac{(a^2 + 16ay_0 + 16y_0^2)}{2(a + 2y_0)}$ куб имеет в момент $t_{min} = t_0 + \dfrac{2y_0(a + y_0)}{a + 2y_0}$ (см. Рисунок 2), где a – длина ребра куба, y_0 – минимальная координата точек куба по оси y в начальном положении.

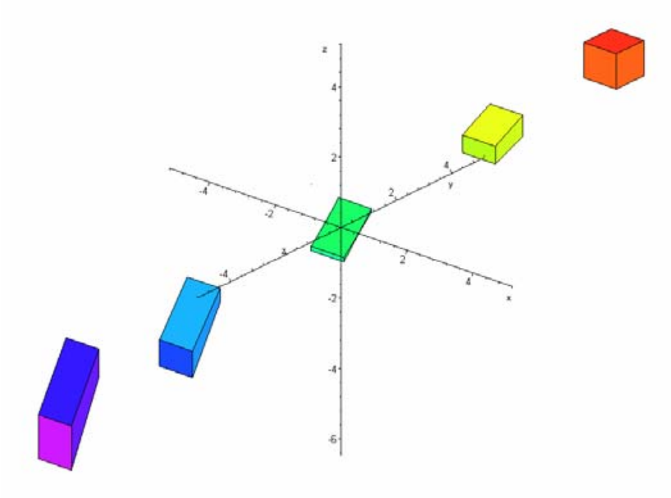

Рисунок 1

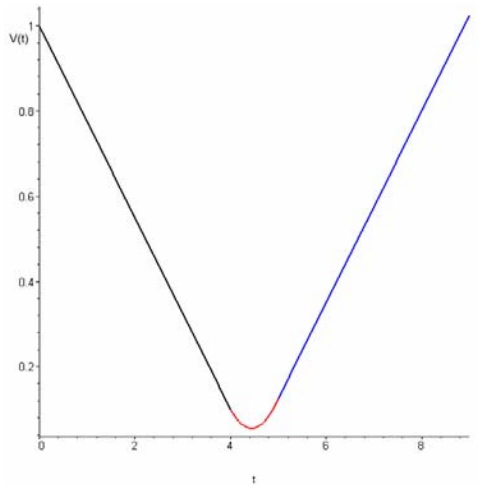

Рисунок 2

В §10 рассматриваем 4-х мерную подалгебру 4.12. Уравнения движения частиц в пространстве имеют вид $x = x_0 - t^4,\ y = v_0 t,\ z = w_0 t,$
где x_0, v_0, w_0 – лагранжевы координаты.

Движение выделенного объема жидкости, ограниченного сферой при t<0 (см. Рисунок 3), можно представить как сжатие в двух направлениях с неизменным третьим размером**.** Движение выделенного объема жидкости, ограниченного сферой при t>0(см. Рисунок 4), можно представить как расширение в сечениях y, z с одним неизменным размером в направлении оси x.

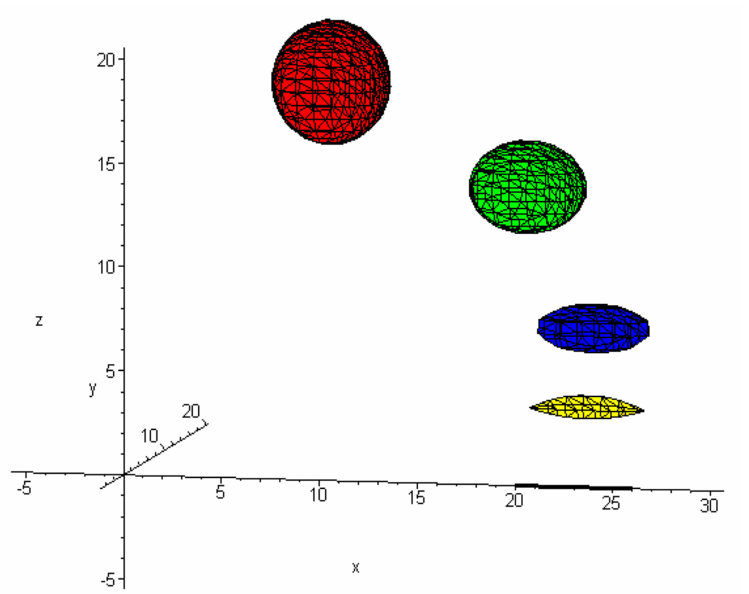

Рисунок 3

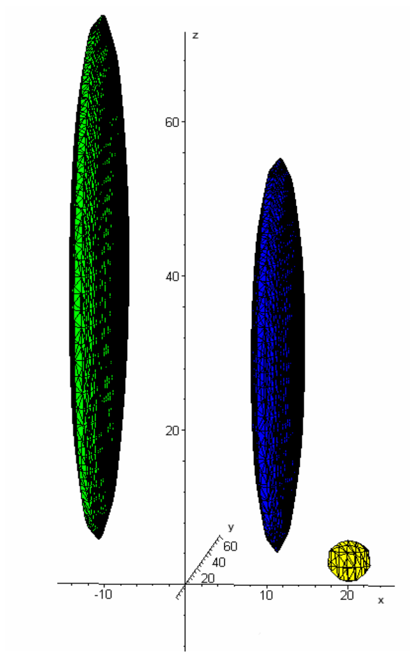

Рисунок 4

В §11 рассмотрено решение с линейным полем скоростей (случай с1). Уравнения движения частиц имеют вид $x^i = x_0^i(t-t_i)(t_0-t_i)^{-1}$, где x_0^i- начальное положение частицы в момент $t = t_0$. На рисунке 5 изображено движение куба жидкости, который при движении в разные моменты времени попадает на координатные плоскости. При движении между ними куб обжимается со всех сторон.

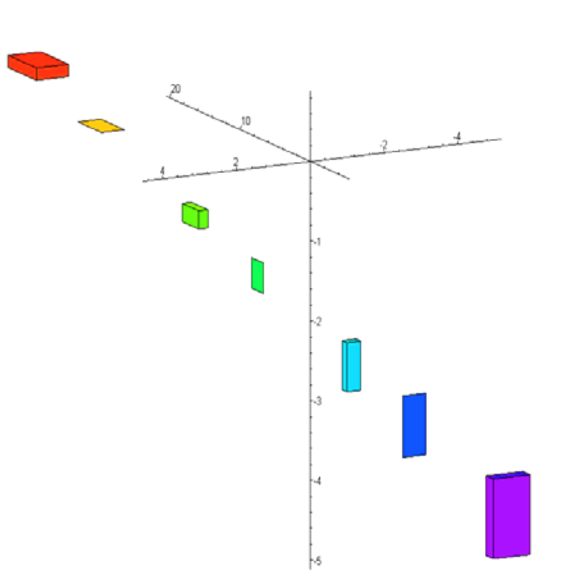

Рисунок 5

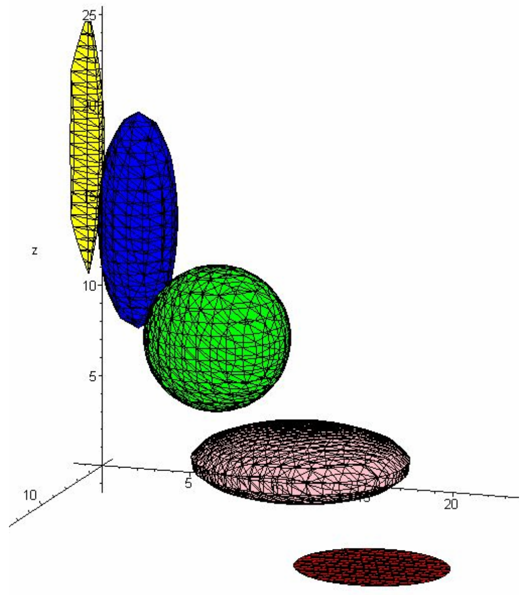

Рисунок 6

В §12 рассмотрено решение с линейным полем скоростей (случай с2).

Уравнения движения частиц таковы

$$x = \frac{x_0}{t_0-t_1}(t-t_1), y = \frac{y_0}{t_0-t_1}(t-t_1) + t_1^2(t-t_0)\frac{x_0}{(t_0-t_1)^2}, z = \frac{z_0}{t_0-t_2}(t-t_2),$$

где x_0, y_0, z_0- начальное положение частицы в момент $t = t_0$. На рисунке 6 представлено движение объема жидкости, ограниченного сферой, который при движении испытывает два плоских сжатия.

Заключение.

1. Предложен способ понижения порядка инвариантных подмоделей, основанный на использовании фактора нормализатора, а также использующий дополнительные интегралы, найденные по аналогии с нахождением интеграла Бернулли и интеграла закрутки.

2. Установлена редукция дифференциально – инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям.
3. Разработан аналитический метод нахождения решений инвариантных подмоделей с линейным полем скоростей, построенных на четырехмерных подалгебрах.
4. Дана физическая интерпретация нестационарных трехмерных явлений, описываемых подмоделями сжимаемой жидкости с линейным полем скоростей, с помощью многопараметрического семейства точных решений. Установлено, что эти явления описывают процессы объемного сжатия и расширения, протекания жидкости через щель.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф. – м.н., профессору С. В. Хабирову за постановку задачи, внимание к работе и поддержку.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. Дифференциально – инвариантные подмодели трехмерных подалгебр для сжимаемой жидкости / Уразбахтина Л. З. // Сибирский журнал индустриальной математики. Том X. №2(30). 2007 г. – С. 128-137.

2. Интегрирование дифференциально – инвариантных подмоделей / Уразбахтина Л. З. // Труды института математики и механики УрО РАН. Том 13. №4. 2007 г. – С. 129 – 137.

В других изданиях

3. Простые решения уравнений сжимаемой жидкости / Уразбахтина Л. З. // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 36-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. – 2005 г. – С. 217-221.

4. Частично инвариантное решение ранга 3 дефекта 2 для подалгебры из двух переносов и растяжения для уравнений сжимаемой жидкости /

Уразбахтина Л. З. // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. – 2006 г. – С. 277-280.

5. Дифференциально – инвариантные подмодели для одной трехмерной подалгебры / Уразбахтина Л. З. // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: материалы III Всероссийской конференции. Екатеринбург: УрО РАН. – 2006 г. – С. 99-100.

6. Дифференциально – инвариантная подмодель стационарного типа почти двумерных движений газа / Уразбахтина Л. З. // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. – 2007 г. – С. 219-223.

7. Гиперзвуковое приближение для одной инвариантной подмодели / Уразбахтина Л. З. // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. – 2008 г. – С. 180-183.

8. Редукция дифференциально - инвариантных подмоделей к инвариантным / Уразбахтина Л. З. // Труды института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 6. – Уфа– 2008 г. – С. 143-149.

9. Исследование частного решения одной инвариантной подмодели, найденного с помощью гиперзвукового приближения / Уразбахтина Л. З. // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: материалы III Всероссийской конференции. Екатеринбург: УрО РАН. – 2008 г. – С.61- 62.

10. Симметрийные подмодели трехмерных подалгебр / Уразбахтина Л. З. // MOGRAN-13: материалы международной конференции. Уфа: УГАТУ – 2009 г. – С.27.

11. Инвариантные подмодели ранга один газовой динамики со специальным уравнением состояния / Уразбахтина Л. З. // Уфимский математический журнал. Т.1. №3 – 2009 г. – С. 139-153.

Соискатель________________________ Л. З. Уразбахтина

УРАЗБАХТИНА Лилия Зинфировна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
МЕТОДАМИ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 11.11.2009. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр.-отт 1,0. Уч.-изд. л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 555

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический
университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ

450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12