На правах рукописи

ЛУКМАНОВ Наиль Флерович

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РИСКОВОГО СТРАХОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ПЕРИОДОМ НАКОПЛЕНИЯ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа 2007

Работа выполнена на кафедре математики Уфимского государственного авиационного технического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Бакиров Наиль Кутлужанович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Бронштейн Ефим Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент Абдюшева Светлана Рашитовна

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет ВМиК

Защита состоится 14 декабря 2007 года в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при Уфимском государственном авиационном техническом университете по адресу: 450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уфимского государственного авиационного технического университета.

Автореферат разослан 13 ноября 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Г.Т.Булгакова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время математическое моделирование все глубже проникает во все сферы человеческой деятельности, в том числе и в страхование. Расширяется область применимости результатов, полученных в страховой математике. Плоды теоретических исследований вызывают все большую заинтересованность практиков страхования, а в каждой крупной страховой компании есть штатные актуарии.

В диссертации исследуются динамические модели рискового страхования. В большинстве работ, посвященных данной тематике, результаты, как правило, получены для моделей с детерминированным процессом поступления страховых премий, иногда с постоянной скоростью, как в классической модели Крамера–Лундберга. В моделях страхования, в которых приток капитала в страховую компанию является случайным процессом, обычно предполагается независимость процесса поступления страховых премий и процесса выплат по искам. Подобные модели адекватны в случаях, когда страховой рынок является устоявшимся, но не позволяют учитывать такую особенность в деятельности страховой компании, как наличие зависимости между процессом поступления страховых премий и процессом выплат, что характерно для России. Таким образом, разработка моделей, в которых это учитывается, является актуальной задачей.

Цель и задачи работы. Цель работы: разработка и исследование нового класса моделей рискового страхования, исследование модели с тремя случайными процессами риска. Нахождение оценки вероятности неразорения и оценки, аналогичной формуле Лундберга, в различных асимптотиках.

Задачи исследования:

- нахождение оценки вероятности неразорения страховой компании до заданного момента времени для предложенной в работе динамической модели рискового страхования с периодами накопления при неограниченном росте среднего числа заключенных договоров страхования (полисов) в единицу времени;

- разработка аналитических методов для решения задачи оценки вероятности неразорения в предложенной модели рискового страхования при неограниченном росте среднего числа заключенных договоров страхования (полисов) в единицу времени;

- разработка программных средств имитационного моделирования для динамической модели рискового страхования с периодами накопления;

- проведение вычислительных расчетов вероятности разорения для предложенной в работе новой динамической модели страхования.

Научная новизна

- Исследован ряд новых моделей динамического рискового страхования, в которых процесс выплат по искам зависит от процесса поступления страховых премий. Данные модели существенно отличаются от известных тем, что не являются мартингалами или марковскими процессами. Для них найдены асимптотики вероятности неразорения.

- Впервые найдено распределение максимума приращения винеровского процесса и совместное распределение максимума и минимума приращения винеровского процесса на отрезке, позволяющие находить оценки вероятностей неразорения в моделях рискового страхования.

- Впервые найдена вероятность нахождения одной винеровской траектории между двумя другими, которая используется в аналитическом методе исследования модели с тремя капиталами страховых компаний.

Научная и практическая ценность работы. Созданная в рамках данной работы динамическая модель рискового страхования является более адекватной при описании реальных процессов, встречающихся в деятельности страховой компании. Результаты были получены для случая, когда капитал страховой компании моделировался случайным процессом, который не является мартингалом или марковским процессом.

Методы, примененные в данной работе в ходе исследования моделей, могут быть использованы в качестве инструмента для решения задач страховой и финансовой математики и иных задач математического моделирования.

Методы исследования. Аналитические исследования проводились с использованием методов теории случайных процессов. Использовался метод вычислительного эксперимента на ПЭВМ.

Достоверность. Достоверность результатов исследования обусловлена строгостью аналитических доказательств полученных результатов.

На защиту выносятся:

- ряд новых динамических моделей рискового страхования и оценки вероятностей неразорения страховой компании для данных моделей;

- метод определения асимптотики вероятности неразорения страховой компании для динамической модели страхования с применением распределения максимума приращения винеровского процесса на отрезке; результаты расчета совместного распределения максимума и минимума приращения винеровского процесса на отрезке;

- метод определения вероятности возникновения ситуации, когда в течение заданного времени для трех страховых компаний при неограниченном росте среднего числа проданных компаниями полисов за единицу времени их порядок по текущему размеру капитала останется неизменным;

- программный продукт, реализующий имитационное моделирование процессов риска.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на научных семинарах г. Уфы и всероссийских конференциях, соответствовавших профилю диссертации. В частности, были сделаны доклады:

1) на Втором Всероссийском симпозиуме по промышленной математике (летняя сессия, Самара, 2001),

2) на 8-й Всероссийской школе–коллоквиум по стохастическим методам (Йошкар-Ола, 2001),

3) на семинаре по теории вероятностей и математической статистике кафедры математики УГАТУ, руководитель профессор Ф. С. Насыров,

4) на методологическом семинаре Института математики с вычислительным центром УНЦ РАН, руководитель профессор Н. К. Бакиров,

5) на городском семинаре по специальности 05.13.18., по математическому моделированию, численным методам, комплексам программ, руководители профессор Н. Д. Морозкин, профессор М. Д. Рамазанов, профессор С. И. Спивак.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в шести статьях ([1]-[6]). Работы [2], [3] выполнены совместно с Н. К. Бакировым. Из результатов этой работы в диссертацию автором включены только результаты, полученные им лично.

Структура диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения, библиографического списка из 60 наименований. Объем диссертации составляет 110 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении обосновывается актуальность работы, сформулированы ее цели и задачи, дан краткий обзор ранее созданных и рассмотренных моделей рискового страхования, излагается краткое описание диссертации по главам.

Глава 1. Динамическая модель рискового страхования.

В этой главе предложена и исследована динамическая модель рискового страхования, не являющаяся марковским процессом, и в рамках которой процесс выплат по искам подчинен процессу притока капитала.

В **§1.1** построена динамическая модель рискового страхования с одинаковым для всех полисов детерминированным временем τ между моментами поступления страховых премий (продажи полиса) и выплатами по искам (далее – период накопления) (**модель 1**).

Начальная величина капитала компании $R_0 = \text{const}$. Предполагается, что число заключенных договоров $\nu(t)$ есть пуассоновский процесс с параметром $\lambda > 0$. Страховая премия по каждому договору может быть представлена как $Z = Sz$, где $S = \text{const}$ – страховая сумма (максимальная величина иска), z – страховая ставка. Иски Y_j допускают представление $Y_j = SX_j, j = 1, 2, ...$, где относительные ущербы X_j – независимые одинаково распределенные случайные величины, $x = \mathbf{E}X_j$, $\delta^2 = \mathbf{D}X_j$. В силу принципа средней безубыточности $z > x$. После заключения договора страхования компания откладывает часть страховой премии в размере $\mathbf{E}SX_1 = Sx$ в резерв. В момент выплаты по иску отложенные по договору деньги возвращаются из резерва. До этого момента страховая компания не может ими распоряжаться, и они не будут учитываться в капитале компании.

Тогда капитал страховой компании $R(t)$ определяется следующим образом.
При $t \in (0, \tau]$ $\quad R(t) = R_0 + \nu(t)S(z - x)$.

При $t \in (\tau, T]$ $\quad R(t) = R_0 + \nu(t)S(z - x) + \sum\limits_{k=1}^{\nu(t-\tau)} S(x - X_k)$.

Доказывается ряд вспомогательных лемм, которые требуются для дальнейших расчетов.

Пусть ξ_k- независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{D}\xi_k = 1$.

Лемма 1. *В сделанных предположениях*

$$\mathbf{P}\left(\max_{i \le \nu(t)} \left|\sum_{k=1}^{i} \xi_k\right| \ge C_1\sqrt{\lambda}\right) \le 2\mathbf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k\right| \ge (C_1 - \sqrt{2})\sqrt{\lambda}\right),$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Лемма 2. *В сделанных предположениях* $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k \to W(t)$ *в смысле слабой сходимости при* $\lambda \longrightarrow \infty$, *где* $W(t)$ *– стандартный винеровский процесс.*

Лемма 3. $\dfrac{\nu(t+\tau) - \nu(t)}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\tau \to (W(t+\tau) - W(t))$ *в смысле слабой сходимости при* $\lambda \longrightarrow \infty$.

Обозначим $J_\lambda = \mathbf{P}\left(R(t) > 0, \forall t \in (0, T]\right)$. Данное обозначение сохранится и для других моделей. С помощью приведенных выше лемм получен основной результат для модели 1:

Теорема 1.

Пусть $z = z(\lambda), R_0 = R_0(\lambda)$ и существуют и конечны пределы:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sqrt{\lambda}(z-x)}{\delta} = C, \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{R_0}{S\delta\sqrt{\lambda}} = r > 0.$$

Тогда предел вероятности неразорения страховой фирмы вычисляется по формуле

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} J_\lambda = \mathbf{P}(r + C(t_1+\tau) + \delta^2 W(t_1) > 0, \forall t_1 \in (0, T-\tau]),$$

где $W(t)$– стандартный винеровский процесс.

В **§1.2** рассматривается вероятность разорения $\psi(u)$ при начальном капитале u. Доказывается оценка

$$\psi(u) \le L\mathrm{e}^{-Du} + B\mathrm{e}^{-Au},$$

где $L = \dfrac{1}{C_0}\exp\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{g}{4(z-x)^2} - \lambda\tau C_0\right)$, $D = \dfrac{1}{2(z-x)S}$,

$A = \dfrac{(z-x)}{16gS}$, $B = \exp\left(-\dfrac{3\lambda\tau(z-x)^2}{32g} - \dfrac{240(z-x)^2}{256g}\right)$,

$C_0 = 1/2 - 1/e > 1/8$, а g – это константа, удовлетворяющая условию $\mathbf{E}\exp((X^* - x)t) < \exp(gt^2)$.

Таким образом, получена экспоненциальная по размерам начального капитала оценка, аналогичная неравенству Лундберга.

В **§1.3** найдена асимптотика вероятности разорения $\psi(u, T)$ в пределе при $\lambda \to \infty$.

Пусть $R_0 = R_0(\lambda), z = z(\lambda)$, и существуют и конечны пределы:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sqrt{\lambda}(z-x)}{S\delta} = C, \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\frac{R_0}{S\delta\sqrt{\lambda}} = r > 0.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda\longrightarrow\infty}\psi(R_0, T) = 1 - \mathbf{P}(W(t) + (C/\delta^2)t) > (-r - C\tau)/\delta^2, \forall t \in (0, T-\tau]) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(-\frac{(-r-C\tau)/\delta^2}{\sqrt{2(T-\tau)}} + \frac{C/\delta^2\sqrt{T-\tau}}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\exp(2(C/\delta^2)(-r-C\tau)/\delta^2)\mathrm{Erfc}\left(-\frac{(-r-C\tau)/\delta^2}{\sqrt{2(T-\tau)}} + \frac{C/\delta^2\sqrt{T-\tau}}{\sqrt{2}}\right),$$

где

$$\mathrm{Erfc}(x) = \int\limits_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2}dx.$$

В **§1.4** рассмотрено обобщение модели 1, когда период накопления τ – случайная величина, одинаковая для всех договоров (**модель 2**), $0 < \tau \leq$ $\leq T$. Для этой модели получено следующее представление вероятности неразорения:

$$\mathbf{P}\left(\min_{0<t\leq T} R(t,\tau) \geq 0\right) = \int_0^T \mathbf{P}\left(\min_{0<t\leq T} R(t,x) \geq 0\right) \mathbf{p}_\tau(x)dx,$$

где $\mathbf{p}_\tau(x)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины τ.

В **§1.5** исследуется модель страхования, отличающаяся от рассмотренной в §1.1 тем, что периоды накопления по разным полисам отличаются, а именно: $\tau_k,\ k = 1, 2, ...$ – независимые дискретные одинаково распределенные случайные величины (**модель 3**). Максимально возможное значение τ_k равно A. N – число возможных значений периода накопления. $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть $a_i,\ i = 1, 2, \ldots, N,$ – упорядоченные возможные значения τ_k. $A = a_N > a_{N-1} > ... > a_1 = 0$, $\mathbf{P}(\tau_k = a_i) = p_i$.

Тогда капитал страховой фирмы в момент времени $t \in (0, T]$ в этой модели представляется в виде

$$R(t) = R_0 + \nu(t)S(z-x) + \sum_{k=1}^{\nu(t-a_N)} S(x - X_k)I_{k,N} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\nu(t-a_{N-1})} S(x - X_k)I_{k,N-1} + ... + \sum_{k=1}^{\nu(t-a_1)} S(x - X_k)I_{k,1},$$

где $I_{k,l} = I\{\tau_k = a_l\}$, $I\{H\}$ – индикатор события H. В данном выражении это индикатор выплаты по иску.

Введем случайную функцию $X_{\nu(t)}(s) = \sum\limits_{k=\nu(t)+1}^{\nu(t+s)} \xi_k$.

Для получения основного результата доказывается вспомогательная

Лемма 4. *В сделанных предположениях* $X_{\nu(t)}(s)/\sqrt{\lambda}$ *слабо сходится к* $W(t+s) - W(t)$ *при* $\lambda \longrightarrow \infty$.

Основной результат для Модели 3:

Теорема 2. *Пусть* $z = z(\lambda), R_0 = R_0(\lambda)$ *и*

$$\sqrt{\lambda}(z-x)/\delta \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} C \geq 0, \qquad R_0/(S\delta\sqrt{\lambda}) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} r > 0.$$

Тогда предел вероятности неразорения страховой компании вычисляется по формуле

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda = \mathbf{P}\left(r + Ct + \sum_{k=1}^{N} \alpha(k)W_k(t - a_k) > 0, \forall t \in (0, T]\right),$$

где $W_k(t)$ – независимые между собой стандартные винеровские процессы, $\alpha(k) = \sqrt{\mathbf{P}(\tau_1 = a_k)}$.

В **§1.6** рассматривается модель страхования, в рамках которой период накопления τ_k имеет непрерывное распределение (**Модель 4**).

Обозначим t_i моменты поступления страховых премий (или моменты заключения договоров).

Тогда капитал страховой фирмы в момент времени $t \in (0, T]$ в этой модели представляется в виде

$$R(t) = R_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} S(z - x) + \sum_{k=1}^{\nu(t)} S(x - X_k) I\{t_k + \tau_k < t\}.$$

Обозначим $W(s,t)$ двупараметрический броуновский процесс (броуновский лист), т.е. гауссовский случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $\mathbf{E}W(s_1, t_1)W(s_2, t_2) = \min(s_1, s_2)\min(t_1, t_2)$.

Главным результатом первой главы является следующая теорема, доказываемая в §1.6 :

Теорема 3. *Пусть $z = z(\lambda), R_0 = R_0(\lambda)$ и*

$$\sqrt{\lambda}(z - x)/\delta \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} C \geq 0, \qquad R_0/(S\delta\sqrt{\lambda}) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} r > 0.$$

Тогда предел вероятности неразорения страховой компании вычисляется по формуле

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{P}\{\min_{t\in[0,T]} R(t) \geq 0\} = \mathbf{P}\left(r + Ct + \int\limits_0^t W\left(dF(s), t - s\right) \geq 0, \forall t \in [0, T]\right),$$

где $F(s)$ – функция распределения случайной величины τ_1.

В **§1.7** приводятся схема вычислительного расчета и результаты расчета оценок вероятности разорения для динамической модели рискового страхования с периодами накопления.

Приведена зависимость вероятности неразорения от предела начального капитала и от величины интервала времени, в течение которого определяется вероятность неразорения.

В **§1.8** описана схема проведения имитационного моделирования для динамической модели рискового страхования с периодами накопления. Предусмотрено моделирование с постоянным периодом накопления и случайными периодами накопления с непрерывным, равномерным и показательным распределениями.

Также предусмотрено имитационное моделирование процесса Крамера–Лундберга.

Глава 2. Определение асимптотики вероятности неразорения с использованием распределения супремума приращения винеровского процесса на отрезке

В **§2.1** построен частный случай динамической модели рискового страхования.

Рассмотрим деятельность филиала страховой компании, созданного для текущих расчетов с клиентами. После выплат по искам клиентам, спустя фиксированное время τ, компания пополняет средства филиала для его дальнейшего функционирования.

Пусть число исков к страховой компании $\nu(t)$ есть пуассоновский процесс с параметром $\lambda > 0$. Иски являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами Y_i, $\mathbf{E}Y_i = y$.

Далее предполагаем, что как и в ранее описанных моделях, после заключения договора страхования компания откладывает часть страховой премии в размере средней выплаты в резерв. Страховая компания не может распоряжаться средствами резерва. В момент выплаты по иску отложенные в момент заключения договора деньги возвращаются из резерва. Этот механизм позволит компенсировать потери клиентов в случае разорения страховой компании за счет средств резерва.

Тогда капитал филиала страховой компании определяется выражением:

При $t \in (0, \tau]$ $R(t) = R_0 - \sum\limits_{k=1}^{\nu(t)} (Y_i - y)$.

При $t \in (\tau, T]$ $R(t) = R_0 - \sum\limits_{k=1}^{\nu(t)} (Y_i - y) + \sum\limits_{k=1}^{\nu(t-\tau)} (Y_i - y) = R_0 - \sum\limits_{k=\nu(t-\tau)+1}^{\nu(t)} (Y_i - y)$.

Определим $J_\lambda = \mathbf{P}\left(R(t) > 0, \forall t \in (0, T]\right)$.

Далее показывается, что задача нахождения асимптотики вероятности неразорения приводит к задаче нахождения распределения максимума приращения винеровского процесса.

$$\lim_{\lambda \to \infty} J_\lambda = \mathbf{P}\left(r + W(t) - W(t - \tau) > 0, \forall t \in (\tau, T]\right)$$

Пусть $\xi(t)$ – гауссовский процесс с $\mathbf{E}\xi(s)\xi(t) = (r - |t - s|)_+ - r^2$, $\mathbf{E}\xi(t) = 0$, $(x)_+ \stackrel{def}{=} \max(0, x)$. Случайный процесс $\xi(t)$ распределен как случайный процесс приращений винеровского моста: $\xi(t) \stackrel{D}{=} W_0(t-r) - W_0(t)$, где $W_0(t)$ – стандартный винеровский мост. $W_0(l) = W(l) - lW(1), l \in [0, 1]$.

Основные усилия во второй главе были направлены на доказательство в **§2.2** теоремы 4.

Теорема 4. *В сделанных предположениях*

$$J(x) = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} \xi(t) \geq x\right\} = \mathbf{P}\{\{\xi_1 \geq x\}\bigcup\{\xi_2 \geq x\}\}+$$

$$+\mathbf{E}\left(\frac{2x-\tilde{\xi}}{\sqrt{1-\delta}}\right)_+ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2x-\tilde{\xi}}{\sqrt{1-\delta}}\right)^2\right),$$

где $\tilde{\xi}$ – гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\delta(1-\delta)$,

$$(\xi_1, \xi_2) \in N\left(0, \begin{pmatrix} r(1-r) & -(1-r)^2 \\ -(1-r)^2 & r(1-r) \end{pmatrix}\right).$$

Следствие 1. Ясно, что случайный процесс $\xi(t) + r\xi_0$, где ξ_0 – нормально распределенная случайная величина с 0-м средним и дисперсией 1, не зависящая от случайного процесса $\xi(t)$, распределен так же, как процесс приращений винеровского процесса: $\xi t + r\xi_0 \stackrel{D}{=} W(t+r) - W(t), t \in [0, 1-r]$, где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Тем самым

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} [W(t+r) - W(t)] \geq x\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} J(x-ry)dy.$$

В **§2.3** доказывается теорема о совместном распределении максимума и минимума приращения винеровского моста.

Обозначим

$$G(x,y) = \mathbf{P}\left\{\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} \xi \geq x\right\}\bigcup\left\{\inf_{t\in(0,1-r)} \xi \leq y\right\}\right\}, \quad y \leq x,$$

$$K(u,z,a,b,t) = \exp\left(\frac{(z-u)^2}{2t}\right) \times$$

$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(z-u+2q(b-a))^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(z-u-2a+2q(b-a))^2}{2t}\right)\right).$$

Теорема 5. *Для всех* $r \in [0{,}5; 1]$, $y \leq x$

$$G(x,y) = \mathbf{P}\left\{\{\xi_1 \notin [y,x]\}\bigcup\{\xi_2 \notin [y,x]\}\right\} +$$

$$+\mathbf{E}(1 - K(\xi_1, \xi_2, y, x, 1-\delta))I\{\xi_1 \in [y,x]\bigcup \xi_2 \in [y,x]\},$$

где случайные величины ξ_1, ξ_2 *определены выше в теореме 4,* $I\{H\}$ *– индикатор события* H.

Глава 3. Распределение супремума приращения винеровского процесса на отрезке

В **§3.1** рассматриваются эволюции капиталов трех страховых компаний $R^{(1)}(t), R^{(2)}(t)$ и $R^{(3)}(t)$, определенных в §1.1. Без ограничения общности можно считать, что $t \in [0,1]$.

$$R^{(i)}(t) = R_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\nu^{(i)}(t)} S(z-x) + \sum_{k=1}^{\nu^{(i)}(t)} S\left(x - X_k^{(i)}\right) \mathbf{I}\left\{t_k^{(i)} + \tau_k^{(i)} < t\right\}.$$

Количество заключенных договоров $\nu^{(i)}(t)$ - пуассоновский процесс с одинаковым для всех компании параметром $\lambda > 0$. Относительные ущербы $X_k^{(i)}, i = 1,2,3, k_i = 1,2,...,$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}X_k^{(i)} = x, \mathbf{D}X_k^{(i)} = \delta^2$.

Предполагаем, что в начальный момент времени было справедливо соотношение $R_0^{(1)} < R_0^{(2)} < R_0^{(3)}$, $R_0^{(i)} = R_0^{(i)}(\lambda)$, $z = z(\lambda)$.

Обозначим $J_\lambda = \mathbf{P}\left\{R^{(1)}(t) < R^{(2)}(t) < R^{(3)}(t),\ \forall t \in [0,T]\right\}$

Как показано в этом параграфе, если существуют и конечны пределы:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda}(z-x)}{S\delta} = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{R_0^{(i)}}{\delta\sqrt{\lambda}} = r^{(i)} > 0,$$

$$r^{(1)} < r^{(2)} < r^{(3)},$$

то при $\lambda \to \infty$

$$J_\lambda \to \mathbf{P}\left\{W_1(t) + r^{(1)} \le W_2(t) + r^{(2)} \le W_3(t) + r^{(3)},\ \forall t \in [0,1]\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{W_1(t) + r^{(1)} - r^{(2)} \le W_2(t) \le W_3(t) + r^{(3)} - r^{(2)},\ \forall t \in [0,1]\right\}$$

в смысле слабой сходимости, где $W_i(t), t \in [0,1]$ – независимые стандартные винеровские процессы. Тогда при $r_1 < r_2 < r_3$

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda = \mathbf{P}\left\{W_1(t) + r_1 < W_2(t) + r_2 < W_3(t) + r_3,\ \forall t \in [0,1]\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{W_1(t) + r_1 - r_2 < W_2(t) < W_3(t) + r_3 - r_2,\ \forall t \in [0,1]\right\}.$$

Тем самым первоначальная задача была сведена к задаче поиска вероятности нахождения одной броуновской траектории между двумя другими.

В **§3.2** рассчитывается вероятность нахождения одной броуновской траектории между двумя другими.

Пусть $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$, $t \in [0,1]$ – независимые стандартные винеровские процессы и обозначим $\forall C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$.

$$U\left(C_1, C_2\right) = \mathbf{P}\left\{W_1(t) - C_1 < W_2(t) < W_3(t) + C_2,\ \forall t \in [0,1]\right\}$$

– вероятность того, что три независимые броуновские частицы, стартующие одновременно из трех разных точек на прямой не столкнутся в течение промежутка времени $[0,1]$. Вероятность нестолкновения двух частиц равна

$$A\left(C_1,\right) \stackrel{def}{=} P\left\{W_1(t) - C_1 < W_2(t),\ \forall t \in [0,1]\right\} = 1 - 2\int\limits_{C_1/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

На плоскости R^2 обозначим через D_1 сектор с вершиной в начале координат, лежащий в первой и четвертой четвертях, симметричный относительно оси OX, с углом при вершине $60°$. Прямые $x = 0, y = \pm x/\sqrt{3}$ разбивают плоскость на шесть конгруэнтных секторов $D_1, D_2, \ldots, D_6$, здесь нумерация секторов соответствует их обходу против часовой стрелки. Пусть $z = (x, y)$, P_k – оператор поворота плоскости относительно начала координат на угол $(k-1)60°$ по часовой стрелке, обозначим

$$Q(z) = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2}\right),\ f(z) = (-1)^{k+1} Q(P_k z),\ \forall z \in D_k, k = 1, ..., 6,$$

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \qquad R(t) = \sqrt{t} e^{-t} I_0(t),$$

$$G_\lambda(z) = \frac{|z|}{8\sqrt{2\pi}(1-\lambda^2)^{3/2}}\, R'\left(\frac{|z|^2}{8(1-\lambda^2)}\right), \qquad |z|^2 = x^2 + y^2.$$

Теорема. *Справедливо представление:*

$$U(C_1, C_2) = V\left(\frac{C_1 + C_2}{2}, \frac{C_2 - C_1}{2\sqrt{3}}\right) + A(C_1)A(C_2), \qquad \forall C_1, C_2 \geq 0,$$

где

$$V(x, y) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{z}{\lambda}\right) * G_\lambda(z) d\lambda,$$

здесь $u * v$ – операция свертки функций u и v.

Основные результаты работы

1) Разработан новый класс динамических моделей рискового страхования, в которых процесс выплат по искам зависит от процесса поступления страховых премий, стохастический процесс капитала фирмы не является мартингалом или марковским процессом.

2) Разработаны новые аналитические методы исследования моделей: метод, основанный на использовании теоремы Ю. В. Прохорова, метод, основанный на использовании вероятности превышения фиксированного уровня максимумом приращения винеровского процесса, и метод, основанный на использовании вероятности непересечения траекторий трех броуновских частиц.

3) На основе аналитического метода работы с моделью проведены вычислительные расчеты вероятности разорения при различных наборах входных параметров: начальный капитал, максимальный интервал времени работы страховой компании.

4) Разработан программный продукт, реализующий имитационное моделирование процессов риска и определение на основе метода Монте-Карло вероятности разорения страховой компании (свидетельство №2007614618).

Благодарности: Автор благодарит своего научного руководителя профессора Н. К. Бакирова (Институт математики с ВЦ, Уфа) за постановку задач и помощь в написании диссертации.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК.

1. Лукманов Н. Ф. Асимптотика вероятности неразорения страховых компаний / Н. Ф. Лукманов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2004. – Т.11, вып.1. – С.67–72.

2. Лукманов Н. Ф. Распределение супремума приращения винеровского процесса на отрезке / Н. Ф. Лукманов, Н. К. Бакиров // Вестник УГАТУ. – 2003. – Т.4, №2. – С.84–88.

3. Лукманов Н. Ф. Вероятность нахождения одной броуновской траектории между двумя другими / Н. Ф. Лукманов, Н. К. Бакиров // Вестник УГАТУ. – 2006. – Т.7, №1. – С.133–136.

В других изданиях.

4. Лукманов Н. Ф. Оценка оптимальной страховой ставки для динамической модели страхования / Н. Ф. Лукманов // Обозрение прикладной и промышленной математики: мат. Шестой Всерос. шк.–коллоквиума по стохастическим методам. – 1999. – Т.6, вып. 1. – С.172.

5. Лукманов Н. Ф. Асимптотика вероятности неразорения для динамической модели рискового страхования с непрерывной отсрочкой / Н. Ф. Лукманов // Обозрение прикладной и промышленной математики: мат. Второго Всерос. симпозиума по промышленной математике. – 2001. – Т.8, вып.1. – С.259.

6. Лукманов Н. Ф. Модель страхования с непрерывным временем отсрочки / Н. Ф. Лукманов // Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания: межвузов. науч. сб. – Уфа: Изд-во УГАТУ, 2002. – С.94–98.

Лукманов Наиль Флерович

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РИСКОВОГО СТРАХОВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ПЕРИОДОМ НАКОПЛЕНИЯ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 12 ноября 2007. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Times New Roman.
Усл.печ.л. 1,0. Усл.кр.-отт. 1,0 Уч.-изд.л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 561.
ГОУВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа-центр, ул.К.Маркса, 12