На правах рукописи

ИСЛАМОВ Ринат Робертович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа 2007

Работа выполнена на кафедре вычислительной техники и защиты информации в ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель — доктор технических наук, профессор **ГУЗАИРОВ Мурат Бакеевич**

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук, профессор **АСАДУЛЛИН Рамиль Мидхатович**

доктор технических наук, профессор **ЮСУПОВА Нафиса Исламовна**

Ведущая организация — **Башкирский государственный университет, кафедра математического моделирования**

Защита диссертации состоится 14 декабря 2007 г в 10^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.288 06 при ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу 450000, г Уфа, Республика Башкортостан, ул К Маркса, д 12, корп 1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уфимского государственного авиационного технического университета

Автореферат разослан 12 ноября 2007 г

Ученый секретарь диссертационного совета доктор физико-математических наук, профессор — **БУЛГАКОВА Г. Т.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Изучение моделей динамических систем с гироскопической структурой, описывающих движение данных систем при параметрических возмущениях с учетом диссипации, является актуальной задачей, поскольку динамические системы с гироскопической структурой встречаются во многих областях техники Это гироскопические системы (гировертикали, гирокомпасы, гиростабилизаторы и т д), которые применяются в авиации и на морских судах для навигации и автоматического управления, на танках для стабилизации прицелов и орудий, в нефтяной и горнорудной промышленности при бурении скважин, прокладке шахт и тоннелей и т д В реальных условиях эксплуатации гироприборы находятся под воздействием разнообразных возмущений, которые могут привести к параметрическим резонансным явлениям, нарушающим нормальную работу гироприборов Предвидение и предупреждение резонансных явлений – неотъемлемая часть расчетов на точность и стабильность работы гироскопических систем

Изучение линейной математическои модели движения динамических систем с гироскопической структурой в условиях параметрических возмущений и диссипации приводит к исследованию линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и гироскопическими связями, что представляет трудную для исследования задачу

С такими уравнениями приходится встречаться при исследовании движения моделей гироскопических систем в линейном приближении при вибрациях основания, когда центр тяжести гироприбора смещен относительно точки подвеса (гиромаятник, гирокомпас и т д) Смещение центра тяжести может происходить в процессе еıо эксплуатации вследствие температурных напряжений, износа подшипников и т д

Большое число задач физики и техники сводится к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, что подчеркивает актуальность указанной проблемы Достаточно указать на теорию нелинейных колебаний, небесную механику, динамическую устойчивость упругих систем, проблемы волновой механики, колебаний коленчатых валов

Несмотря на многочисленные исследования по изучению уравнений с периодическими коэффициентами, выполненные отечественными и зарубежными учеными, некоторые вопросы остаются нераскрытыми Задача о влиянии малых диссипативных сил для системы с гироскопическими связями при параметрическом резонансе является актуальной, так как в реальных системах всегда имеет место диссипация, а этот вопрос изучен недостаточно Также важной является задача об устойчивости гироскопически стабилизированных динамических систем при различных классах параметрических возмущений, которая на настоящий момент практически не изучена

Необходимо отметить, что учет диссипативных сил в линейной модели движения делает непригодными многие методы, применяемые для исследования параметрических резонансов в канонических системах Поэтому актуальна задача построения упрощенной линейной модели рассматриваемой динамической системы, удобной для дальнейшего исследования

Цель работы

Целью работы является построение линейной модели динамической системы с гироскопической структурой при параметрических возмущениях с учетом диссипации в специальных координатах, разработка приближенного аналитического метода исследования устойчивости таких систем для различных классов параметрических возмущений, создание численного метода и комплекса программ для нахождения границ областей неустойчивости

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи

1 Построить линейную модель динамической системы с гироскопической структурой при действии диссипативных сил и параметрических возмущений в специальных координатах

2 Разработать приближенный аналитический метод исследования устойчивости динамической системы при действии гироскопических и диссипативных сил в случае наличия параметрических возмущений на основе ее линейной модели

3 Провести исследование влияния диссипативных сил на устойчивость динамических систем с гироскопической структурой в случае простого и комбинационного параметрических резонансов Изучить движение гироскопически стабилизированных систем для различных классов периодических возмущений

4 Разработать численный метод и комплекс программ для построения границ областей неустойчивости системы и применить созданные методы к исследованию параметрического резонанса в конкретных гироскопических системах

Научная новизна работы заключается в следующем

1 Научная новизна разработанной линейной модели движения динамической системы с гироскопической структурой заключается в учете действия диссипативных сил и параметрических возмущений, а также в

приведении ее к специальным координатам, удобным для дальнейшего исследования

2 Разработан приближенный аналитический метод исследования устойчивости движения для построенной модели в случае параметрических возмущений, новизна которого заключается нахождении границ области неустойчивости непосредственно через параметры систем и обобщении результатов, касающихся устойчивости движения динамических систем при параметрических возмущениях на более широкий класс динамических систем с гироскопической структурои

3 Получены данные о расширении границ области неустойчивости в случае комбинационного параметрического резонанса при наличии в системе с гироскопической структурой достаточно малого трения, научная новизна которых заключается в определении критериев, при которых происходит расширение границы области неустойчивости на плоскости параметров системы Также получены новые данные об устойчивости гироскопически стабилизированной системы для различных классов параметрических матриц возмущений

4 Разработан численный метод и комплекс программ для построения границы области неустойчивости в случае параметрического резонанса, опирающийся на новые подходы, предложенные в диссертационной работе

Теоретическая и практическая ценность работы

Теоретическая ценность работы заключается в разработке приближенного метода исследования устойчивости для линейной модели динамической системы с гироскопической структурой по виду периодических матриц возмущений и установлении критерия расширения границы области неустойчивости в случае комбинационного параметрического резонанса при наличии малой диссипации

Практическая ценность работы заключается в применении разработанных методов при исследовании устойчивости движения гироскопических приборов (гировертикали, гирокомпаса, четырехгироскопной вертикали) в случае параметрического резонанса Получены соотношения, позволяющие отыскать параметры гироскопических приборов, исключающие возможность наступления простого параметрического резонанса Разработанные численные методы используются для построения границ области неустойчивости

Методы исследований

Поставленные в работе задачи решались с использованием методов математического моделирования и численного решения дифференциальных уравнений

При решении задач использовались методы преобразования уравнений к форме Рауса и специальным координатам, а также методы математической теории параметрического резонанса

Достоверность научных положений, результатов и выводов, содержащихся в диссертационной работе, основывается на классических методах механики, математической теории параметрического резонанса и подтверждается сравнением полученных результатов с некоторыми известными

На защиту выносятся:

1 Результаты исследования линейной модели некоторых динамических систем с гироскопической структурой при параметрических возмущениях

2 Вывод о расширении области неустойчивости при комбинационном параметрическом резонансе для системы с гироскопическими связями при введении малой диссипации

3 Исследование устойчивости гироскопически стабилизированных систем при симметрических и кососимметрических матрицах возмущений

4 Использование полученных результатов и предложенного метода в исследовании некоторых гироскопических приборов

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях и семинарах

1 2-я региональная зимняя школа-семинар аспирантов и молодых ученых – УГАТУ, 2007

2 Международная математическая конференция «Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика» – Уфа, 2007

3 Международная конференция «Компьютерные науки и информационные технологии CSIT'2007» – Уфа, 2007

4 Уфимский городской семинар по математическому моделированию, численным методам и программированию – Уфа БашГУ, 2007

Публикации

Основные материалы диссертационной работы опубликованы в 7 работах, в том числе 3 статьи в издании, рекомендованном ВАК, 3 – в материалах и трудах конференций, 1 – свидетельство об официальной регистрации программного продукта

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, одного приложения и списка литературы Работа без библиографического списка содержит 118 страниц машинописного текста и библиографический список из 110 наименований

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируется цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость результатов работы, выносимых на защиту, дается краткое описание работы и обзор работ, имеющих наиболее близкое отношение к теме диссертации

В первой главе в предположении, что существуют циклические интегралы, уравнения движения динамической системы с гироскопической структурой приводятся к форме Рауса Далее линеаризованные уравнения движения динамической системы для нециклических координат, при наличии ε - параметрических возмущений с частотой θ и диссипативных сил (со слабой диссипацией), записываются в виде

$$A\frac{d^2X}{dt^2}+G\frac{dX}{dt}+BX=\varepsilon\left[D+D_1(\theta t)\right]\frac{dX}{dt}+\varepsilon M(\theta t)X, \tag{1}$$

здесь X – n-мерный вектор, $A=A^*$, $B=B^*$, $G=-G^*$, $-D>0$ – вещественные постоянные $n\times n$ матрицы (* – знак транспонирования), $\varepsilon>0$ – малый параметр, $D_1(\tau+2\pi)\equiv D_1(\tau)$, $M(\tau+2\pi)\equiv M(\tau)$ $(\tau=\theta t)$ – вещественные периодические $n\times n$ матрицы, элементы которых представлены рядами Фурье

Уравнения вида (1) часто встречаются в задачах современной техники и физики при исследовании параметрического резонанса В дальнейшем исследуется устойчивость по Ляпунову решений X=0 системы (1) в зависимости от свойств возмущающих матриц $D_1(\theta t)$, $M(\theta t)$ и находятся области неустойчивости на плоскости параметров ε,θ в случае параметрического резонанса при наличии в системе диссипативных сил

Для решения этих задач система (1) приводится к специальным (квазинормальным) координатам

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\varepsilon N(\theta t)\frac{dY}{dt}+\left(C+\varepsilon P(\theta t)\right)Y=0, \tag{2}$$

где Y – n-мерный вектор, $C=\mathrm{diag}\left(\omega_1^2,\ ,\omega_n^2\right)$ – диагональная матрица, причем ω_1, , ω_n – частоты собственных колебаний системы (1) при

$\varepsilon = 0$, $P(\theta t)$, $N(\theta t)$ – периодические $n \times n$ матрицы Получены расчетные формулы, связывающие коэффициенты Фурье элементов матриц $P(\theta t)$, $N(\theta t)$ и D, $D_1(\theta t)$, $M(\theta t)$ Система дифференциальных уравнений (2) представляет собой упрощенную линейную модель исследуемой динамической системы, описываемой уравнениями (1) с точностью до ε^2 При этом устойчивость тривиального решения системы (2) равносильна устойчивости тривиального решения системы (1) Система (2) более удобна для исследования параметрического резонанса

Также приводятся основные положения теории параметрического резонанса

Уравнения (1), (2) при сколь угодно малом ε и некотором θ могут иметь неограниченные при $t \to +\infty$ решения В этом случае говорят, что в системе наступает параметрический резонанс Точку $(\varepsilon_0, \theta_0)$ будем называть неустойчивой точкой, если уравнения (1), (2) для всех неотрицательных ε и θ, достаточно близких соответственно к ε_0 и θ_0, имеют неограниченное при $t \to +\infty$ решение На плоскости параметров ε, θ множество всех неустойчивых точек распадается на счетное число связных областей, каждая из которых имеет вид «клиньшков», примыкающих острыми концами к точкам $(0, \theta_0)$, на оси θ Частота θ_0 называется критической (резонансной) Критическими частотами для систем (1), (2) могут быть лишь частоты вида

$$\theta_0 = N^{-1}(\omega_j + \omega_h)\,(j, h, \ \ , n, N = 1,2, \ \ ) \tag{3}$$

или

$$\theta_0^* = N^{-1}\left|\omega_j - \omega_h\right|, \tag{4}$$

где $\omega_1, \ \ , \omega_n$ – частоты собственных колебаний систем (1) и (2) при $\varepsilon = 0$ Частоты (3) при $j=h$ называются частотами основного (простого) резонанса, частоты (3) при $j \neq h$, а также частоты (4) называются частотами комбинационного резонанса

Определение 1. Будем относить систему уравнений (1) к классу *M*, если ее характеристические показатели расположены симметрично относительно мнимой оси

Постоянную симметрическую матрицу *A* будем называть определенно положительной матрицей, если ей соответствует положительно определенная квадратичная форма

Определение 2. Частоту θ_0 будем называть сильно устойчивой, если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $\widetilde{M}(\theta t)$, $\widetilde{D}_1(\theta t)$

в (1), удовлетворяющих условию

$$\left|\widetilde{M}(\theta t)-M(\theta t)\right|<\eta,\left|\widetilde{D}_1(\theta t)-D_1(\theta t)\right|<\eta,\ (-\infty<t<+\infty) \quad (5)$$

и оставляющих систему (1) в классе *M*, решения системы (1) будут устойчивы при всех θ, ε, для которых выполняются неравенства

$$|\theta-\theta_0|<\delta, \quad 0\le\varepsilon<\delta, \quad (6)$$

где η, δ – некоторые положительные числа

Только счетное число частот вида (3) и (4) может не быть сильно устойчивым

Определение 3 Частоту θ_0 будем называть сильно неустойчивой, если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $\widetilde{M}(\theta t)$, $\widetilde{D}_1(\theta t)$ в (1), удовлетворяющих (5) и оставляющих систему (1) в классе *M*, при любых $\eta>0, \delta>0$ найдутся θ, ε из (6), при которых решения системы (1) будут неустойчивы

В этом случае к критической частоте θ_0 будет примыкать широкая область неустойчивости

Во второй главе исследуется устойчивость решений векторного уравнения, представляющего собой линейную модель движения динамической системы с гироскопической структурой при наличии возмущений при координате, следующего вида

$$A\frac{d^2X}{dt^2}+G\frac{dX}{dt}+BX=\varepsilon M(\theta t)X \quad (7)$$

Получены следующие результаты

Теорема 2.1. Если в системе (7) класса *M* с положительно определенными диагональными матрицами *A*, *B* и кососимметрической матрицей *G* матрица $M(\theta t)$ – симметрическая, то частоты θ_0 (3) не могут быть сильно устойчивыми, а сопряженные им частоты θ_0^* (4) не могут быть сильно неустойчивыми

Теорема 2.2. Если в системе (7) класса *M* с положительно определенными диагональными матрицами *A*, *B* и кососимметрической матрицей *G* матрица $M(\theta t)$ – кососимметрическая, то частоты θ_0 (3) не могут быть сильно неустойчивыми, а частоты θ_0^* (4) не могут быть сильно устойчивыми

Здесь теорема 2 1 обобщает результат М Г Крейна на некоторый класс систем с гироскопическим членом $G\dfrac{dX}{dt}$

Теоремы 2 1 и 2 2 являются также обобщением теоремы К Г Валеева на системы с гироскопическими членами

Приводятся формулы, определяющие границы области неустойчивости, выраженные через параметры системы

Также изучается устойчивость решений векторного уравнения

$$A\frac{d^2X}{dt^2}+G\frac{dX}{dt}+BX=\varepsilon D_1(\theta t)\frac{dX}{dt} \tag{8}$$

для различных классов матриц возмущения $D_1(\theta t)$ Доказаны теоремы 2 1 и 2 2

Теорема 2 3. Если в системе (8) класса М с положительно определенными диагональными матрицами A, B и кососимметрической матрицей G матрица $D_1(\theta t)$– симметрическая, то частоты θ_0 (3) и θ_0^* (4) не могут быть сильно устойчивыми

Теорема 2.4. Если в системе (8) класса M с положительно определенными диагональными матрицами A, B и кососимметрической матрицей G матрица $D_1(\theta t)$– кососимметрическая, то частоты θ_0 (3) и θ_0^* (4) не могут быть сильно неустойчивыми

Рассмотрены примеры, где результаты численного исследования уравнения согласуются с результатами, полученными аналитически

Изучается влияние малых диссипативных сил на устойчивость динамической системы с гироскопической структурой при параметрических возмущениях Рассматриваются уравнения вида

$$A\frac{d^2X}{dt^2}+G\frac{dX}{dt}+BX=\varepsilon(D+D_1(\theta t))\frac{dX}{dt}+\varepsilon M(\theta t)X, \tag{9}$$

где $A=diag(a_1, \ \ ,a_{2n})$, $B=diag(b_1, \ \ ,b_{2n})$, $D=diag(-d_1, \ \ ,-d_{2n})$, $a_k>0, b_k>0, d_k>0$, G – кососимметрическая матрица вида

$$G=\begin{pmatrix} 0 & H_1 & 0 & 0 \\ -H_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & H_{2n-1} \\ 0 & 0 & -H_{2n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (H_{2m-1}>0, m=1,2, \ \ ,n), \tag{10}$$

$D_1(\theta t)$, $M(\theta t)$ – вещественные периодические $2n\times 2n$ матрицы с периодом $T = 2\pi\theta^{-1}$, элементы которых представимы рядами Фурье

$$\begin{gathered} D_1(\theta t)=\|\mu_{rs}(\theta t)\|_1^{2n}, \quad \mu_{rs}(\theta t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mu_{rs}^{(k)}e^{ik\theta t}, \\ M(\theta t)=\|\kappa_{rs}(\theta t)\|_1^{2n}, \quad \kappa_{rs}(\theta t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\kappa_{rs}^{(k)}e^{ik\theta t} \end{gathered} \tag{11}$$

Системой вида (9) описываются линеаризованные дифференциальные уравнения движения гиромаятника, четырехгироскопной вертикали, однороторного гирокомпаса и т д при линейных вибрациях основания с учетом сил трения в осях подвесов Квадраты собственных частот системы (9) при $\varepsilon = 0$ выражаются формулами

$$\omega_{2s-1,2s}^2 = \frac{H_{2s-1}^2}{2a_{2s-1}\,a_{2s}}\left(1+\mu_{2s-1}+\mu_{2s} \pm \sqrt{\left(1+\mu_{2s-1}+\mu_{2s}\right)^2 - 4\mu_{2s-1}\,\mu_{2s}}\right), \quad (12)$$

где введены безразмерные параметры

$$\mu_{2s-1} = \frac{b_{2s-1}\,a_{2s}}{H_{2s-1}^2}, \quad \mu_{2s} = \frac{b_{2s}\,a_{2s-1}}{H_{2s-1}^2} \quad (s = 1, 2, \quad , n) \quad (13)$$

Здесь H_{2s-1} – кинетический момент ротора гироскопа, $a_k, b_k\ (k = 1, \quad , 2n)$– элементы матриц A и B (9)

Для быстровращающихся гироскопов имеют место соотношения

$$\mu_{2s-1} \ll 1, \mu_{2s} \ll 1 \quad (14)$$

Частоты ω_{2s-1} и ω_{2s} $(s = 1, 2, \quad , n)$ (12) будем называть соответственно частотами нутационных и прецессионных колебаний Для частоты ω_{2s-1} в формуле (12) перед корнем следует взять знак «+» Для быстровращающихся гироскопов выполняются условия

$$\omega_{2s} \ll \omega_{2s-1} \quad (s = 1, 2, \quad , n) \quad (15)$$

Используя результаты главы I, приводим уравнения (9) к специальной форме (2), где матрицы $N(\theta t)$ и $P(\theta t)$ имеют представление

$$N(\tau) = \left\|\nu_{rs}(\tau)\right\|_1^{2n}, \quad \nu_{rs}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_{rs}^{(k)} e^{ik\tau},$$
$$P(\tau) = \left\|\pi_{rs}(\tau)\right\|_1^{2n}, \quad \pi_{rs}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi_{rs}^{(k)} e^{ik\tau}, \tau = \theta t \quad (16)$$

Параметрический резонанс в системе (2) и (9) возможен при критических значениях частоты θ, определяемых

$$\theta_0 = \theta_{\gamma,l,m} = \frac{\omega_l + \omega_m}{\gamma}, \quad \theta_0^* = \theta_{\gamma,l,m}^* = \frac{\left|\omega_l + \omega_m\right|}{\gamma} \quad (l, m = 1, \quad ,2n, \gamma = 1, 2, \quad) \quad (17)$$

Равенство (17) для данных θ_0 и θ_0^* выполняется лишь при единственном наборе номеров γ, l, m Границы областей неустойчивости

$$\theta_- < \theta < \theta_+ \quad (18)$$

для системы (2) на плоскости параметров ε, θ в первом приближении будут

$$\theta_{\pm} = \theta_0 + \varepsilon\lambda_{\pm}, \quad \theta_0 = \frac{\omega_l + \omega_m}{\gamma} \tag{19}$$

Здесь выражения для коэффициентов λ_-, λ_+, полученные в работе К Г Валеева, для системы (2) без трения $v_{ss}^{(0)} = 0$ и с трением $v_{ss}^{(0)} \neq 0$ имеют соответственно вид

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\pi_{ll}^{(0)}}{\omega_l} + \frac{\pi_{mm}^{(0)}}{\omega_m} \pm 2\sqrt{g(l,m)}\right) \tag{20}$$

и

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\pi_{ll}^{(0)}}{\omega_l} + \frac{\pi_{mm}^{(0)}}{\omega_m} \pm \alpha(l,m)\sqrt{g(l,m) - v_{ll}^{(0)}\, v_{mm}^{(0)}}\right), \tag{21}$$

где введено обозначение

$$g(l,m) \equiv \left(\frac{\pi_{lm}^{(-\gamma)}}{\omega_m} + i v_{lm}^{(-\gamma)}\right)\left(\frac{\pi_{ml}^{(\gamma)}}{\omega_l} - i v_{ml}^{(\gamma)}\right), \ \left(i = \sqrt{-1}\right), \tag{22}$$

$$\alpha(l,m) = \frac{v_{ll}^{(0)} + v_{mm}^{(0)}}{\sqrt{v_{ll}^{(0)}\, v_{mm}^{(0)}}} \tag{23}$$

Приведем выражение для $\lambda_{\pm}$ в случае основного (простого) резонанса при наличии в системе трения

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\pi_{ll}^{(0)}}{\omega_l} \pm \sqrt{g(l,m) - \left(v_{ll}^{(0)}\right)^2}\right) \tag{24}$$

Из анализа формул (20) – (24) следует, поскольку λ_- и λ_+ имеют смысл угловых коэффициентов касательных в (19), то расширение области неустойчивости может происходить при введении трения лишь в случае комбинационного резонанса Приведены выражения для коэффициентов Фурье $v_{ss}^{(0)}$ $\left(a_k > 0, b_k > 0,\right)$ элементов матрицы $N\left(\theta t\right)$ (16) системы (2), соответствующие частотам нутационных $\omega_{2j-1}\left(j = 1, \ \ , n\right)$ и прецессионных $\omega_{2h}\left(h = 1, \ \ , n\right)$ колебаний системы (9) при $\varepsilon = 0$, полученных после преобразования уравнения (9) к виду (2)

$$\begin{aligned} v_{2j-1,\,2j-1}^{(0)} &= \frac{d_{2j-1}}{a_{2j-1}}\left(1 - \mu_{2j}\right) + \frac{d_{2j}}{a_{2j}}\left(1 - \mu_{2j-1}\right) + O\left(\mu_{2j-1,\,2j}^2\right), \\ v_{2h,\,2h}^{(0)} &= \mu_{2h}\frac{d_{2h-1}}{a_{2h-1}} + \mu_{2h-1}\frac{d_{2h}}{a_{2h}} + O\left(\mu_{2h-1,\,2h}^2\right), \ (j, h = 1, \ \ , n), \end{aligned} \tag{25}$$

где $d_k(k=1, \ \ ,2n)$ – элементы матрицы D – коэффициенты трения системы (9)

На основании соотношений (14) показано, что

$$\nu^{(0)}_{2h,2h} << \nu^{(0)}_{2j-1,2j-1} \quad (j,h=1, \ \ ,n) \tag{26}$$

Неравенства (26) выполняются для систем с большим кинетическим моментом гироскопов (для быстровращающихся гироскопов) В дальнейшем соотношения (26) используются при доказательстве теоремы о расширении области неустойчивости

Получено условие расширения области неустойчивости в случае комбинационного параметрического резонанса при наличии в системе (2) достаточно малого трения в виде

$$g(l,m) > \nu^{(0)}_{ll}\nu^{(0)}_{mm}\frac{\left(\nu^{(0)}_{ll}+\nu^{(0)}_{mm}\right)^2}{\left(\nu^{(0)}_{ll}-\nu^{(0)}_{mm}\right)^2} \quad \left(\nu^{(0)}_{ll} \neq \nu^{(0)}_{mm}\right), \tag{27}$$

где $g(l,m)$ и $\nu^{(0)}_{ss}$ $(s=1, \ \ ,2n)$ выражаются формулами (22) и (25)

Получен следующий результат

Теорема 2.5. Если в системе (9) класса M с положительно определенными диагональными матрицами A, B и кососимметрической матрицей G комбинационная частота $\theta_0 = \gamma^{-1}(\omega_l + \omega_m)$ является сильно неустойчивой ($g(l,m)>0$), то введение трения при условии (27) приводит к расширению области неустойчивости

На основании теоремы 2 5 и формул (21), (23) и (25) можно сделать заключение об особой опасности комбинационного параметрического резонанса для системы (9) в случае частот

$$\theta_0 = \gamma^{-1}\left(\omega_{2j-1} + \omega_{2h}\right) \tag{28}$$

Это утверждение следует из того, что в формуле (23) при $l=2j-1$ и $m=2h$ множитель

$$\alpha(2j-1,2h) = \frac{\nu^{(0)}{}_{2j-1,2j-1} + \nu^{(0)}{}_{2h,2h}}{\sqrt{\nu^{(0)}{}_{2j-1,2j-1}\,\nu^{(0)}{}_{2h,2h}}}, \quad (j,h=1, \ \ ,n), \tag{29}$$

входящий в выражение (21), при условии (26) принимает сколь угодно большие значения

Как следует из формулы (24), силы трения при простом параметрическом резонансе сужают область неустойчивости

В третьей главе исследуется устойчивость решений векторного уравнения вида

$$A\frac{d^2X}{dt^2}+G\frac{dX}{dt}-BX=\varepsilon M(\theta t)X\,, \qquad (30)$$

где $X=\{x_1, \ \ ,x_{2n}\}$ – вектор, $\varepsilon>0$ – малый параметр, $A=\mathrm{diag}(a_1, \ \ ,a_{2n})$, $B=diag(b_1, \ \ ,b_{2n})$, $(a_k>0, b_k>0, \ \ k=1, \ \ ,2n)$, G – кососимметрическая матрица вида (10), $M(\theta t)$ – вещественная периодическая $2n\times 2n$ матрица Например, уравнениями вида (30) описывается движение гироскопической системы (в линейной постановке) при вибрациях основания прибора, когда центр тяжести системы расположен выше точки подвеса Предполагается, что решения уравнения (30) при $\varepsilon=0$ ограничены из-за наличия гироскопического члена $G\dfrac{dX}{dt}$ Квадраты частот собственных колебаний системы (30) при $\varepsilon=0$ находятся из формулы

$$\omega^2_{2s-1,\,2s}=\frac{H^2_{2s-1}}{2a_{2s-1}\,a_{2s}}\left(1-(\mu_{2s-1}+\mu_{2s})\pm\sqrt{(1-\mu_{2s-1}+\mu_{2s})^2-4\mu_{2s-1}\,\mu_{2s}}\right), \qquad (31)$$

где величины μ_{2s-1} и μ_{2s} определены по формулам (13), а ω_{2s-1}и ω_{2s} $(s=1,2, \ \ ,n)$ – частоты нутационных и прецессионных колебаний $(\omega_{2s}\ll\omega_{2s-1})$

Установлен следующий результат

Теорема 3.1 Если в системе (30) класса M с положительно определенными диагональными матрицами A, B и кососимметрической матрицей G матрица возмущения $M(\theta t)$ – симметрическая, то частоты

$$\theta_0=\frac{\omega_{2j-1}+\omega_{2h-1}}{\gamma}, \theta_0=\frac{\omega_{2j}+\omega_{2h}}{\gamma}, \ \theta_0^*=\gamma^{-1}(\omega_{2j-1}-\omega_{2h}) \ (j,h=1, \ \ ,n) \qquad (32)$$

не могут быть сильно устойчивыми, а частоты

$$\begin{gathered}\theta_0^*=\gamma^{-1}(\omega_{2j-1}-\omega_{2h-1}), \quad \theta_0^*=\gamma^{-1}(\omega_{2j}-\omega_{2h}),\\ \theta_0=\gamma^{-1}(\omega_{2j}+\omega_{2h-1}) \ \ (j,h=1, \ \ ,n)\end{gathered} \qquad (33)$$

не могут быть сильно неустойчивыми

Этот результат является новым для систем вида (30) при симметрической матрице возмущений $M(\theta t)$

Теорема 3.2. Если в системе (30) класса M с положительно определенными диагональными матрицами A, B и кососимметрической матрицей G матрица возмущения $M(\theta t)$ – кососимметрическая, то частоты (33) не могут быть сильно устойчивыми, а частоты (32) не могут быть сильно неустойчивыми

Данный результат также является новым для систем (30) с гироскопической стабилизацией при кососимметрической матрице возмущений

$M(\theta t)$. Теоремы 3 1, 3 2 и 2 1, 2 2 указывают на различное поведение систем (30) и (7) при заданных матрицах возмущений $M(\theta t)$

Также исследуется устойчивость гироскопически стабилизированной системы

$$A\frac{d^2X}{dt^2}+G\frac{dX}{dt}-BX=\varepsilon D_1(\theta t)\frac{dX}{dt} \tag{34}$$

для различных классов периодических матриц возмущений $D_1(\theta t)$ Здесь X – $2n$-мерный вектор, A и B – положительно определенные диагональные матрицы, G – кососимметрическая матрица вида (10)

Получены новые данные об устойчивости системы (34)

Теорема 3.3. Пусть в системе (34) класса M диагональные матрицы A и B – определенно положительные, матрица G (10) – кососимметрическая Тогда

1 Если матрица $D_1(\theta t)$ – симметрическая, то частоты

$$\theta_0=\gamma^{-1}(\omega_{2j-1}+\omega_{2h-1}),\quad \theta_0=\gamma^{-1}(\omega_{2j}+\omega_{2h}),$$
$$\theta_0^*=\gamma^{-1}|\omega_{2j-1}-\omega_{2h-1}|,\quad \theta_0^*=\gamma^{-1}|\omega_{2j}-\omega_{2h}|\ (j,h=1,\ \ ,n) \tag{35}$$

не могут быть сильно устойчивыми, а частоты

$$\theta_0=\gamma^{-1}(\omega_{2j-1}+\omega_{2h}),\quad \theta_0^*=\gamma^{-1}|\omega_{2j-1}-\omega_{2h}|\ (j,h=1,\ \ ,n) \tag{36}$$

не могут быть сильно неустойчивыми

2 Если матрица $D_1(\theta t)$ – кососимметрическая, то частоты (36) не могут быть сильно устойчивыми, а частоты (35) не могут быть сильно неустойчивыми

Из утверждений теорем 3 3, 2 3 и 2 4 следует, что резонансные свойства систем (34) и (8) различны при параметрических возмущениях

Приведены формулы, определяющие границы области неустойчивости, выраженные через параметры системы Рассмотрены примеры, иллюстрирующие основные положения изложенной теории

Четвертая глава посвящена применению результатов, полученных в предыдущих главах, в исследовании конкретных гироскопических систем, подверженных действию периодических параметрических возмущений

Исследуется движение гиромаятника и четырехгироскопной вертикали при вибрации основания по гармоническому закону в вертикальном направлении с учетом массы рамок и вязкого трения в опорах осей подвесов При этом уравнения малых колебаний гиромаятника и четырехгироскопной вертикали представляют собой линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами вида (7) и (9), причем для четырехгироскопной вертикали матрица возмущения $M(\theta t)$ – симметрическая матрица четвертого порядка Исследование устойчивости проводится согласно методике, изложенной в главах I – III Приводятся формулы, определяющие границы области неустойчивости в случае простых и комбинационных параметрических резонансов Установлено, что при определенных условиях наличие малого трения в осях карданова подвеса приводит к расширению области неустойчивости при комбинационном параметрическом резонансе Показано, что при определенных соотношениях параметров гиромаятника простые параметрические резонансы отсутствуют С помощью разработанного численного метода определяются границы области неустойчивости

Рассматривается также случай, когда центр тяжести гиромаятника расположен выше точки опоры При этом исследование параметрических колебаний гиромаятника проводится на основе метода, изложенного в главе III при исследовании гиростабилизированной системы

Исследуется движение однороторного гирокомпаса с маятником при трехкомпонентной линейной вибрации основания Полученные уравнения после линеаризации приводятся к линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами вида (9), где матрица возмущения $M(\theta t)$ – симметрическая матрица второго порядка Получены формулы для уравнения границ области неустойчивости на плоскости параметров Приведены условия устойчивости, выраженные через параметры гирокомпаса, амплитуды вибраций и коэффициенты трения в осях подвесов

Также рассматривается вопрос об устойчивости двухроторного гирокомпаса типа Аншютца при циркуляции корабля с учетом диссипативных сил Уравнения движения приводятся к системе вида (2) в квазинормальных координатах Получены уравнения границ области неустойчивости в первом приближении в случае параметрического резонанса С учетом сил трения получены условия асимптотической устойчивости гирокомпаса

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1 Модифицирована линейная модель движения динамической системы с гироскопической структурой в специальных координатах с учетом действия диссипативных сил и параметрических возмущениях

2. Для построенной модели разработан приближенный аналитический метод исследования параметрического резонанса Получены результаты, обобщающие теоремы об устойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами на более широкий класс уравнений с гироскопическим членом

3 Вычислительный эксперимент, проведенный для рассматриваемой модели установил, что в случае комбинационного параметрического резонанса при введении в систему с гироскопической структурой достаточно малого трения происходит расширение границ области неустойчивости Найдены условия, при которых происходит расширение области неустойчивости Также получены новые данные об устойчивости гироскопически стабилизированной системы для различных классов параметрических матриц возмущений

4 Разработан численный метод и комплекс программ для построения границ области неустойчивости Созданные методы применены к исследованию параметрического резонанса в гироскопических системах

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1 Исламов Р Р Исследование параметрического резонанса в гироскопических системах / Р Р Исламов, Р. Р. Исламов (мл) // Вестник УГАТУ – Уфа УГАТУ, 2005 – Т 6 – №1 (12) – С 41–45

2 Исламов Р Р Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений при параметрических возмущениях / Р Р Исламов, Р Р Исламов (мл) // Вестник УГАТУ – Уфа УГАТУ, 2005 – Т 6 – №2 (13) – С 40–44

3 Исламов Р Р Исследование устойчивости решений системы с гироскопической стабилизацией при параметрических возмущениях / Р Р Исламов // Вестник УГАТУ Сер «Управление, вычислительная техника и информатика» – Уфа УГАТУ, 2007 – Т 9 – №4(22) – С 34–38

В других изданиях

4 Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007614619 Расчет областей неустойчивости решений уравнений с гироскопической структурой при параметрическом резонансе / Р Р Исламов РосПатент, 2007

5 Исламов Р Р Исследование устойчивости решений динамической системы с гироскопической структурой при параметрических возмущениях / Р Р Исламов // Интеллектуальные системы обработки информации и управления сб материалов 2-й региональной зимней школы - семинара аспирантов и молодых ученых Сер «Управление, вычислительная техника и информатика» – Уфа УГАТУ, 2007 – С 20–24

6 Исламов Р Р Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / Р Р Исламов // Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика сб материалов Междунар мат конф Т 2 – Уфа ИМВЦ, 2007, – С 12–13

7 Гузаиров М Б Исследование устойчивости решений дифференциальных уравнений с гироскопической структурой / М Б Гузаиров, Р Р Исламов // Материалы 9-й междунар конф по компьютерным наукам и информ технологиям (CSIT'2007) Т 3 – Уфа УГАТУ, 2007 – С 180–183 (Публикация на английском языке)

Диссертант **Р.Р. Исламов**

ИСЛАМОВ Ринат Робертович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Специальность 05 13 18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 08 11 2007 Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная Печать плоская Гарнитура Times New Roman
Усл печ л 1,0 Усл кр -отт 1,0 Уч -изд л 0,9
Тираж 100 экз Заказ № 559

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул К Маркса, 12