

На правах рукописи

МУКСИМОВА Роза Равилевна

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПРОЦЕССОВ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ СВОБОДНЫХ ГРАНИЦ
(НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ)**

**05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ
(технические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

Уфа — 2012

Работа выполнена на кафедре компьютерной математики
Уфимского государственного авиационного технического университета

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий
кафедрой компьютерной математики УГАТУ,
Житников Владимир Павлович

Официальные оппоненты: д-р физ.-мат. наук, проф.
Бронштейн Ефим Михайлович,
Уфимский государственный авиационный
технический университет, профессор
кафедры вычислительной математики
и кибернетики УГАТУ

канд. техн. наук
Идрисов Тимур Рашитович
ООО «ElectroChemical Machining», г. Уфа,
главный технолог ООО «ЕСМ»

Ведущее предприятие: Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва

Защита состоится « 4 » мая 2012 г. в 10 часов
на заседании диссертационного совета Д-212.288.03
при Уфимском государственном авиационном техническом университете
по адресу: 450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета

Автореферат разослан « 30 » марта 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р. тех. наук, проф.

В. В. Миронов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. В настоящее время широкое применение наукоемких технологических процессов требует разработки все более сложных математических моделей, численных методов и проведения комплексных исследований с использованием современных компьютерных технологий. При этом возникают противоречивые требования к проводимым исследованиям. С одной стороны, исследование задач должно проводиться с достаточной полнотой, для качественного описания процесса целесообразно исследование граничных режимов и предельных соотношений геометрических параметров, что связано с большими объемами вычислений и затратами времени на исследования. С другой стороны, возникают затруднения при использовании большого объема данных, полученных в результате этих исследований, для практических целей.

В связи с этим становится актуальной разработка методов построения математических моделей, основанных на анализе и обработке данных, полученных путем численного решения сложных задач. Это, во-первых, облегчает практическое использование результатов, во-вторых, позволяет создать базу для решения более общих задач моделирования. К таким методам построения приближенных моделей относятся, в частности, интерполяция и аппроксимация. Однако эти задачи во многих случаях некорректны, в особенности, когда набор исходных данных является неполным в силу большой сложности их получения в определенных областях. Для получения надежных результатов необходима разработка специальных методов и алгоритмов построения, обоснования и тестирования численных моделей.

Одной из важнейших проблем математического моделирования является совершенствование существующих и разработка новых методов оценки погрешности и обоснования достоверности этих оценок. В данной работе эти цели достигаются с помощью фильтрации численных результатов, полученных при различном числе узловых точек сетки, основанных на подавлении одних компонент погрешности и выявлении других, а также путем использования нескольких способов оценок и их проверки на непротиворечивость.

В частности, к наукоемким относятся процессы размерной электрохимической обработки (ЭХО), которые при допущении о соленоидальности и потенциальности электрического поля сводятся к решению задач Хеле-Шоу, используемых также при исследованиях течений жидкости при преобладании сил вязкости, гидродинамики в пористых средах и др.

Таким образом, актуальность темы диссертации обусловлена как общими проблемами разработки и тестирования математических моделей, так и вопросами использования результатов исследований для практических целей.

Целью исследований является:

Разработка методов построения приближенных моделей стационарных и нестационарных процессов, численно-аналитических методов решения задач Хеле-Шоу, анализ и обоснование результатов вычислительного эксперимента, а также приложение этих методов в области исследования процессов ЭХО.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать метод построения и оценки погрешности приближенных численных моделей, позволяющий его использование в условиях неполноты исходных данных.
2. Разработать численно-аналитические методы решения стационарных и нестационарных задач Хеле-Шоу с подвижной заданной границей криволинейной формы и различными условиями движения неизвестной границы.
3. Разработать комплекс программ и провести комплексное исследование решений указанных задач применительно к ЭХО, обоснование и тестирование алгоритмов и программ, оценку погрешностей результатов. Построить приближенные модели формообразования для возможности практического использования полученных численных результатов.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Фильтрационно-интерполяционный метод построения и оценки погрешности приближенных численных моделей.
2. Численно-аналитические методы решения стационарных и нестационарных задач Хеле-Шоу с негладкой заданной границей.
3. Результаты комплексных исследований решений задач моделирования процессов электрохимического формообразования, включающих предельные режимы, а также комплекс программ, реализующий численные методы. Разработанные приближенные модели стационарных и нестационарных процессов при электрохимическом копировании и резке.

Научная новизна

1. Новизна разработанного метода построения приближенных численных моделей заключается в появлении возможности вычислять искомые параметры в условиях неполноты исходных данных и контролировать их погрешность двумя способами для проверки непротиворечивости оценок.
2. Новизна разработанных численно-аналитических методов заключается в представлении решения в виде суммы двух функций, определенных на разных параметрических плоскостях, использовании формулы Келдыша-Седова, что в отличие от известных ранее методов решения задач Хеле-Шоу, позволяет с высокой точностью моделировать предельные режимы формообразования границ при наличии угловых точек.
3. В результате комплексных исследований задач копирования сегмента круга, прорезания пазов круглым и пластинчатым инструментом, включающих предельные режимы обработки и соотношения геометрических параметров, впервые определены закономерности и зависимости, на базе которых построены приближенные численные модели процессов формообразования.

Достоверность результатов

Достоверность результатов подтверждается применением фильтрации для оценки погрешности численных данных, тестированием алгоритмов и программ путем сравнения оценок результатов, полученных разными способами.

Практическая ценность

Автором получены модели, пригодные для использования при проектировании технологических процессов, разработаны численные методы, алгоритмы и программы решения стационарных и нестационарных задач, что подтверждается актом о внедрении в ООО «ЕСМ».

Результаты исследований внедрены в учебный процесс УГАТУ при реализации учебных планов по дисциплинам «Специальные главы теории функций комплексного переменного», «Экстраполяционные методы оценки погрешности» по направлению 01.03.00 – «Математика. Компьютерные науки».

Работа проводилась по тематике госбюджетной НИР Уфимского государственного авиационного технического университета: «Создание математических моделей естествознания», программы Президента «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-65497.2010.9).

Апробация работы

По основным результатам работы были сделаны доклады на Международной научной школе «Гидродинамика больших скоростей» (Чебоксары, 2008); на Всероссийских зимних школах-семинарах аспирантов и молодых ученых (Уфа, 2008-2011); на международных семинарах «Компьютерные науки и информационные технологии» CSIT (Анталия, 2008, Крит, 2009); на Всеросс. научн. конф. «Мавлютовские чтения» (Уфа, 2009–2011); на XIV междунар. науч. конф. «Решетневские чтения» (Красноярск, 2010); на научно-техн. конф. «Образование и наука – производству» (Набережные Челны, 2010); на 9-й молодежн. научн. школы-конф. «Лобачевские чтения» (Казань, 2010); на междунар. молодежной научн. конф. «XXXVI Гагаринские чтения» (Москва, 2010); на междунар. научн.-техн. конф. «Электроэрозионные и электрохимические технологии в производстве наукоемкой продукции» (Москва, 2010); на 4-й Всероссийск. конф. «Задачи со свободными границами» (Бийск, 2011); на X Всеросс. съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Н. Новгород, 2011).

Публикации

Основные результаты диссертации отражены в 27 научных трудах, в том числе в 4 статьях в изданиях, рекомендованных ВАК, 20 – в других изданиях, 3 свидетельствах о регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы

Диссертация (157 стр.) состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (126 наименов.), содержит 124 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы цель и актуальность работы, кратко изложено содержание работы и сформулированы результаты, выносящиеся на защиту.

В главе 1 проведен анализ литературы, рассмотрены методы построения приближенных моделей формообразования и дана общая постановка задач.

Скорость электрохимического растворения определяется законом Фарадея

$$V_{ectm} = \eta k E_n, \quad k = \frac{M}{\rho_m n_m F} \kappa, \quad (1)$$

где ρ_m , M , n_m – плотность, молярная масса и валентность материала детали; E_n – нормальная к анодной поверхности составляющая напряженности, η – анодный выход по току; F – число Фарадея; κ – электропроводность электролита. Зависимость выхода по току моделировалась скачкообразной функцией

$$\eta(E_n) = \begin{cases} \eta_0, & E_n > E_1, \\ \eta \in [0, \eta_0], & E_n = E_1, \\ 0, & E_n < E_1. \end{cases} \quad (2)$$

В предположении малости зазора по сравнению с радиусом электрод-инструмента (ЭИ) величина безразмерного зазора s_0 между точкой поверхности ЭИ и деталью связана с безразмерным радиусом ЭИ $r=R/l$ уравнением

$$\left(1 + \frac{s'}{r'}\right) \ln\left(1 + \frac{s'}{r'}\right) = \frac{1}{r'}, \quad (3)$$

где характерный размер $l = U/E_0$, $E_0 = V_{et}/(k\eta_0)$, $r' = r \cos \vartheta$, $s' = s_0 \cos \vartheta$; U – напряжение между электродами; V_{et} – скорость ЭИ; ϑ – угол между вектором скорости ЭИ и внешней нормалью к поверхности ЭИ.

Стационарный зазор $s_0(\vartheta, r)$ устанавливается по экспоненциальному закону $e^{-\lambda t}$ с коэффициентом $\lambda = V_{et} \cos^2 \vartheta / S_{st}$, $S_{st} = k\eta_0 U / V_{et}$. Стационарное и предельное формообразование имеют место, соответственно, при выполнении равенств

$$|E| = E_0 \cos \vartheta \text{ (стационарное)}, \quad |E| = E_1 \text{ (предельное)}. \quad (4)$$

Электрическое поле считается соленоидальным и потенциальным. Для решения задач применяются методы теории функций комплексного переменного. Задача заключается в определении конформных отображений на физическую плоскость $Z(\chi, t) = X + iY$ и плоскость комплексного потенциала $W(\chi, \tau) = U(\varphi + i\psi)$ плоскости параметрического переменного $\chi = \sigma + i\nu$, областью изменения которого является, например, полоса. Тогда $E = \partial W / \partial Z$ и (1) эквивалентно равенству

$$\text{Im} \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) = - \frac{\eta}{\eta_0} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad (5)$$

где $z = Z/l$ – безразмерные координаты; $\tau = V_{et} t / l$ – безразмерное время.

В главе 2 решены задачи стационарного и предельного формообразования. В разд. 2.1 получены точные решения трех задач формообразования с помощью плоского инструмента с криволинейным и прямолинейным выступом, которые использовались в качестве тестовых примеров.

В разд. 2.2 разработан численно-аналитический метод и проведено исследование стационарной задачи для плоского ЭИ с полукруглым выступом $AFCGB'$, который движется вертикально вниз со скоростью V_{et} (рис. 1, а). На плоскости годографа напряженности $\bar{E} = dW/dZ$ образом границы ЭИ (рис.

1, б) является кривая FCG . Аноду, согласно (4), соответствует разрез по дуге окружности радиуса $E_0/2$. Ввиду симметрии области рассмотрим ее правую половину. В качестве параметрической области ζ выберем полукольцо (рис. 2, а).

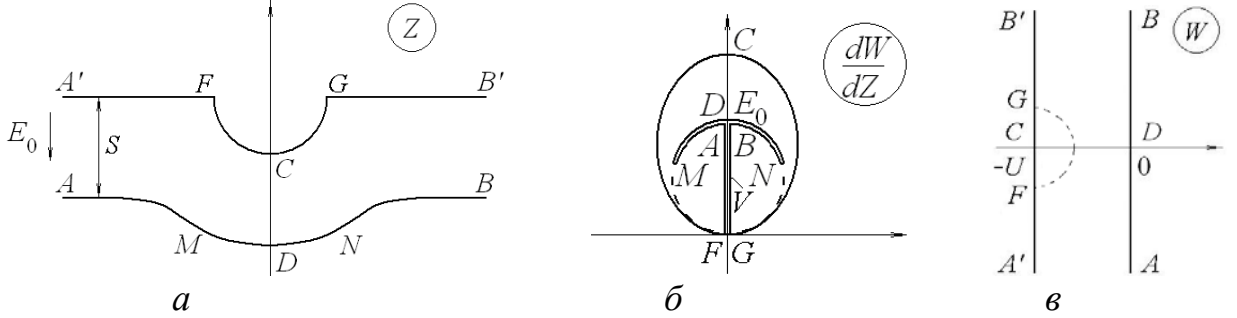


Рисунок 1 – Плоскости: а – физическая; б – годографа напряженности; в – комплексного потенциала

Рассмотрим функцию $\omega(\zeta)$ (рис. 2, б), где

$$\omega(\zeta) = i \ln \frac{2}{E_0} \left(\frac{dW}{dZ} - i \frac{E_0}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + i \ln \frac{\zeta(\zeta - \nu)}{\nu\zeta - p^2} + i \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(p^{-m} \zeta^m - p^m \zeta^{-m} \right). \quad (6)$$

Параметр ν определяется из уравнения $\omega(1) = \pi/2$.

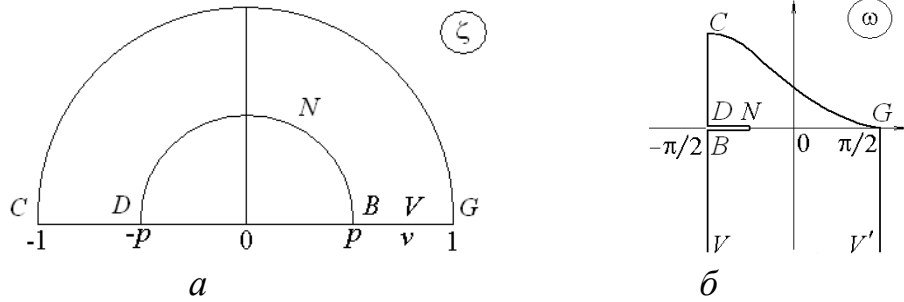


Рисунок 2 – Параметрические плоскости: а – переменного ζ ; б – переменного ω

В связи с эквипотенциальностью электродов образом межэлектродного пространства (МЭП) на плоскости комплексного потенциала является полоса (рис. 1, в). Производная $dW/d\zeta$ определяется конформным отображением

$$\frac{dW}{d\zeta} = -\frac{2Ui}{\pi} \left[\frac{\sqrt{p}}{\zeta - p} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1} - 1} \left(p^{-(2m-1)/2} \zeta^{(m-1)} - p^{(2m-1)/2} \zeta^{-m} \right) \right] \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}. \quad (7)$$

Форма анода определяется численным интегрированием выражения

$$dZ = \frac{2}{E_0} \left(e^{-i\omega(\zeta)} + i \right)^{-1} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (8)$$

Задача решается численно методом коллокаций. Для этого в сумме (6) сохраняется конечное число n слагаемых, а уравнение $|z| = r$, $r = R/S$ выполняется в конечном числе точек границы области $\zeta = e^{i\sigma_m}$, $\sigma_m = \pi m/n$, $m = 0, \dots, n$. Получаемая таким образом система нелинейных уравнений решается относительно параметров C_m ($m \leq n$), p методом Ньютона с регулированием шага.

Форма МЭП для $r=10$ показана на рис. 3, а. Для оценки погрешности значений параметров применялся метод фильтрации последовательности числен-

ных данных, полученных для разных n . что позволило получить результаты с точностью около 12 значащих цифр (рис. 3, б).

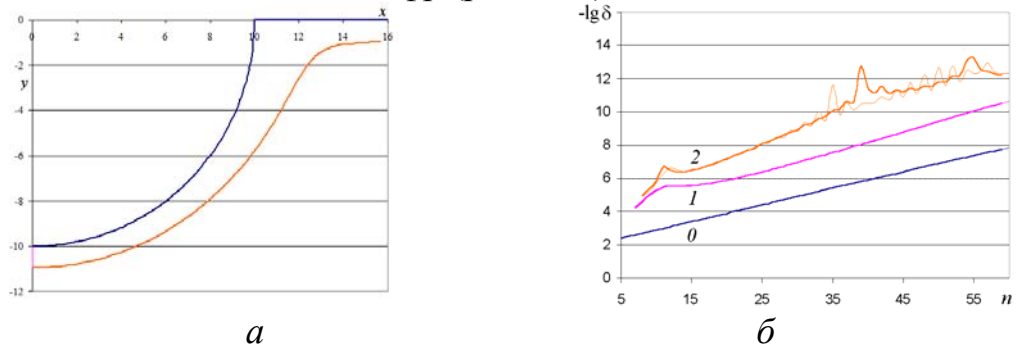


Рисунок 3 – Результаты решения: a – форма МЭП при стационарной ЭХО ($r=10$); b – оценка погрешности ($r=32$)

В разд. 2.3 разработан численно-аналитический метод и решена аналогичная задача о предельном формообразовании. Образом МЭП на плоскости годографа напряженности $\bar{E} = dW/dZ$ является некоторая фигура (рис. 4, a) с разрезом по дуге окружности радиуса E_1 с центром в начале координат. Это следует из условия (4).

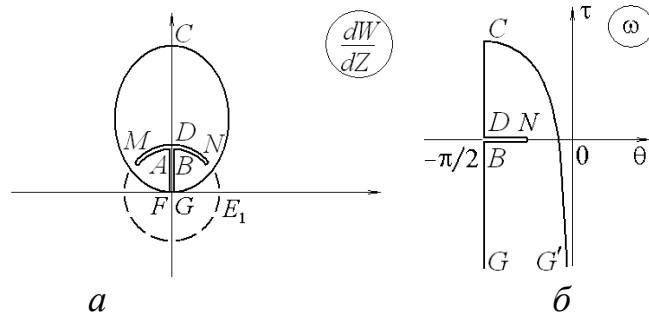


Рисунок 4 – Параметрические плоскости: a – переменного ζ ; b – переменного ω

Рассмотрим функцию Жуковского (рис. 4, б)

$$\omega = i \ln \frac{1}{E_1} \frac{dW}{dZ} = \theta + i\tau \quad \omega(\zeta) = \frac{\pi}{2} + i \ln \frac{\zeta(\zeta-1)}{\zeta-p^2} + i \sum_{m=1}^{\infty} C_m p^m (p^{-m} \zeta^m - p^m \zeta^{-m}). \quad (9)$$

Производная $dW/d\zeta$ получена выше (7). Тогда форма границ определяется численным интегрированием выражения

$$dZ = \frac{1}{E_1} e^{i\omega(\zeta)} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (10)$$

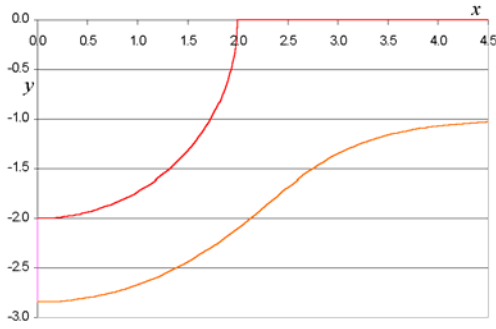
Задача решается численно методом коллокаций, аналогично предыдущей.

Формы МЭП для различных радиусов r показаны на рис. 5.

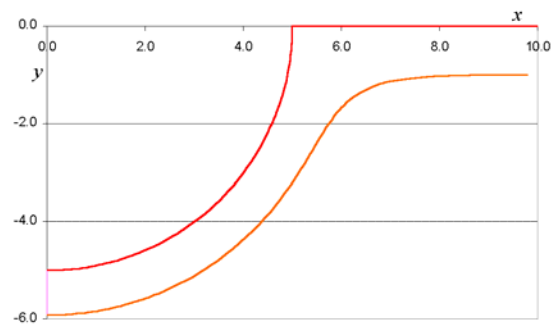
В разд. 1.4 предлагается метод построения интерполяционных моделей на основе решений задач стационарного и предельного формообразования.

На рис. 6, a представлены зависимости $f_2(\vartheta, r) = \frac{s(\vartheta, r)}{s_0(r)} \cos \vartheta - 1$, построен-

ные по данным разд. 1.2. Как показали оценки предельных (при $r \rightarrow \infty$) значений, в рамках погрешности вычисления их следует принять равными 0.

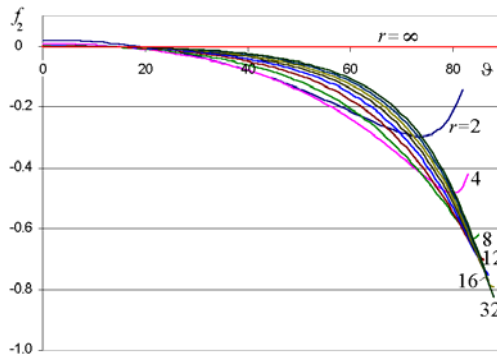


а

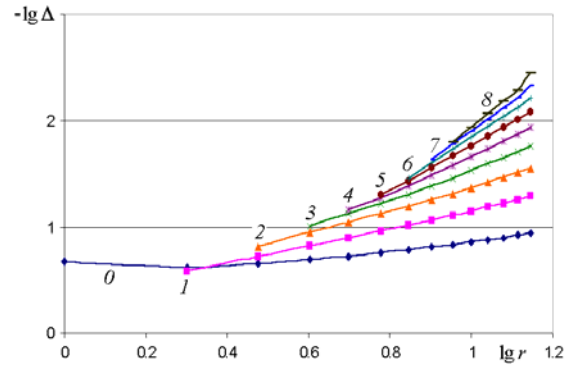


б

Рисунок 5 – Формы МЭП при предельной ЭХО: а – при $r=2$; б – при $r=5$



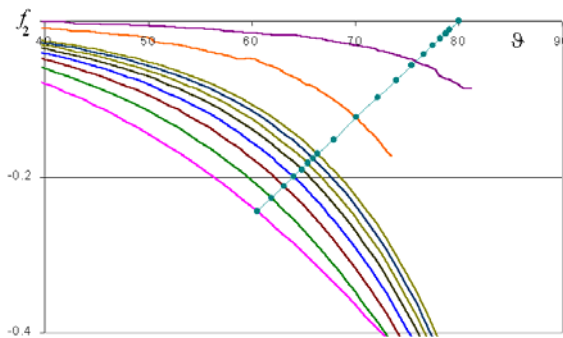
а



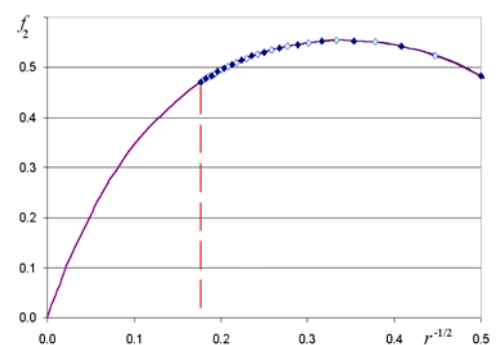
б

Рисунок 6 – К задаче интерполяции: а – зависимость $f_2(\vartheta, r)$; б – оценки погрешности значения $f_2(\vartheta, r)$ при $r=\infty$, $\vartheta=60^\circ$

Отсутствующие данные для $r > 32$ и промежуточных значений r можно получить с помощью интерполяции. Для оценки погрешности интерполяции применяется увеличение степени интерполяционного многочлена, использование исходных данных через одно или несколько значений r_j , интерполяция «по наклонной» вдоль луча $f_0\vartheta = -\vartheta_0(f - f_0)$ (рис. 7, а), использование разных параметров интерполяции ($1/r$, $1/\sqrt{r}$).



а



б

Рисунок 7 – Результаты интерполяции: а – «по наклонной»; б – при разных r для $\vartheta_0=80^\circ$

На рис. 7, б показаны результаты интерполяции по параметру $1/\sqrt{r}$ для $\vartheta_0=80^\circ$. Правее пунктирной прямой расположены заданные точки, левее (кроме нуля) – полученные с помощью интерполяции. На рисунке совмещены графики,

полученные по полной базе данных и по разреженной (через одну точку). Разница не превышает 10^{-3} . На рис. 8 показаны интерполированные зависимости для $r=100$ и $r=1000$ вместе с оценками погрешностей интерполяции, полученной путем сравнения полиномов с возрастающей степенью. На рис. 8, а совмещены графики, полученные по полной и разреженной базе, на рис. 8, б – для интерполяции при $f_0=-10$ и ∞ .

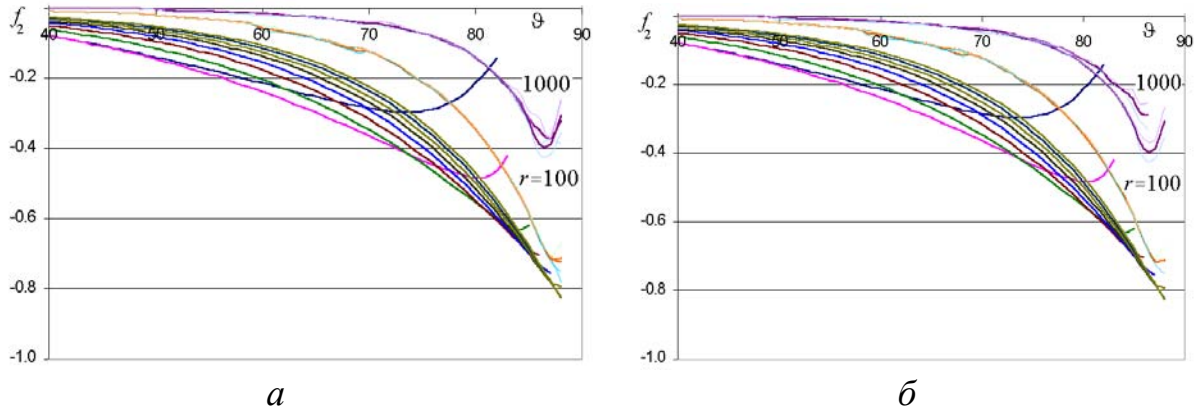


Рисунок 8 – Сравнение результатов интерполяции для $r=100$ и $r=1000$, полученных: а – по полной и разреженной базе; б – при $f_0=-10$ и ∞

Построение численной модели для задачи предельного формообразования проведена таким же способом. Отметим, что данная задача являлась тестовой (в отличие от стационарной), поскольку ограничение значений радиуса, использованных для проведения интерполяции, числом 10 не является существенным. Тем самым, полученные приближенные расчеты и оценки были проверены сравнением с результатами прямого численного решения задачи. Из сравнения следует, что результаты интерполяции и численного решения совпадают при $r=12$ с точностью до 10^{-3} , при $r=15$ до 10^{-2} . При увеличении r значения $f_2(\theta)$ становятся малыми и входят в диапазон 1 %.

Тем самым, согласно оценкам, разработанные численные модели позволяют определить зависимость $s(\theta, r)$ с погрешностью около 1 % для $0 \leq \theta \leq 85^\circ$.

В главе 3 разработан метод решения нестационарных задач формообразования с помощью плоского инструмента с выступом или выемкой (рис. 1, а). Скорость движения ЭИ V_{et} . Начальный межэлектродный зазор AA' равен S_0 .

Перейдем к безразмерным величинам z, x, y, τ и w , где характерный размер l в (5) выбран равным S_{st} . При этом

$$v_{et} = -\frac{dy_{A'}}{d\tau} = 1, \quad v_{ect} = \frac{dy_A}{d\tau} = \begin{cases} 1/s(\tau), & s(\tau) < \alpha, \\ 0, & s(\tau) > \alpha, \end{cases} \quad \alpha = \frac{E_0}{E_1}.$$

Форма области МЭП на плоскости комплексного потенциала представляет собой полосу (рис. 1, в). Выберем в качестве параметрической переменную $\chi = \sigma + iv$, область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу единичной ширины (рис. 9, а). Тогда комплексный потенциал $w=i\chi$, т. е.

$$\partial\psi/\partial\sigma = 1. \quad (11)$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости χ на область МЭП физической плоскости в неподвижной системе координат в виде

$$z(\chi, \tau) = -i \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{s(\tau_1)} + s(\tau)\chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau), \quad (12)$$

где $z_a(\chi, \tau)$ – аналитическая в области D_χ и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_χ функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при $\chi = \sigma + i0$ $\text{Im } z_a(\chi, \tau) = 0$); $z_c(\xi, \tau)$ – аналитическая в области D_ξ и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_ξ функция, предназначенная для описания выпуклости на ЭИ (при $\xi = \omega + i0$ $\text{Im } z_c(\xi, \tau) = 0$). Функция $z_c(\xi, \tau)$ определена на полосе единичной ширины D_ξ (рис. 9, б). Связь ξ и χ

$$\chi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{e^{\pi\xi} e^{\pi\beta} - 1}{e^{\pi\xi} - e^{\pi\beta}} + i, \quad \xi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + e^{\pi\chi} e^{\pi\beta}}{e^{\pi\chi} + e^{\pi\beta}}. \quad (13)$$

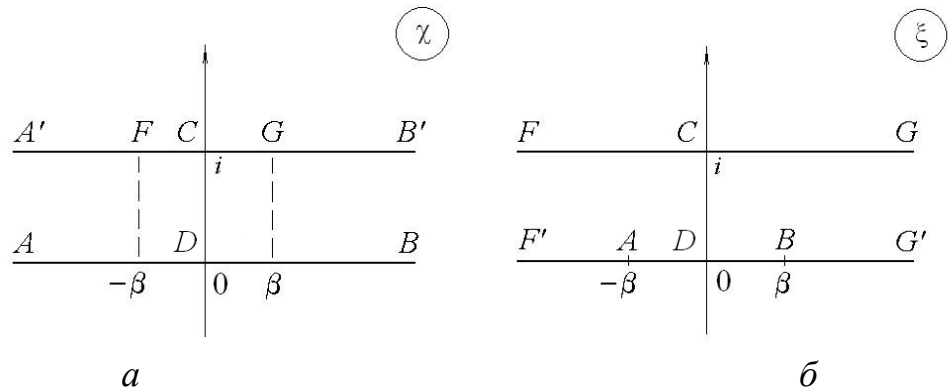


Рисунок 9 – Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ξ

Функция $z_a(\chi, \tau)$ определяется следующим образом. Будем искать решение на границе $\chi = \sigma + i0$ в узловых точках σ_m ($m=0, \dots, n$). Заданными на каждом временном шаге будут значения $\text{Im } z_a(\sigma_m, \tau_j) = y_m$. Примем $\text{Im } z_a(\sigma_n, \tau) = 0$, поскольку $z_a(\sigma, \tau)$ быстро (как экспонента) убывает при $\sigma \rightarrow \infty$. Значения $\text{Im } z_a(\sigma, \tau)$ в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные. Для восстановления функции $z_a(\chi, \tau)$ используем формулу Шварца

$$z_a(\chi, \tau) = \text{sh } \pi\chi \int_0^\infty \text{Im } z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\text{ch } \pi\sigma - \text{ch } \pi\chi}. \quad (14)$$

Функция $z_c(\xi, \tau)$ получается аналогичным образом

$$z_c(\xi, \tau) = \text{sh } \pi\xi \int_0^\infty \text{Im } z_c(\omega + i, \tau) \frac{d\omega}{\text{ch } \pi\omega + \text{ch } \pi\xi}. \quad (15)$$

Производную $\partial z / \partial \tau(\chi, \tau)$, как и конформное отображение $z(\chi, \tau)$ параметрической плоскости χ на физическую, будем искать в классе аналитических функций. Тогда равенство (5) служит краевым условием для определения $\partial z / \partial \tau(\chi, \tau)$ на части границы, соответствующей поверхности анода, на поверхности катода (ЭИ) правая часть (5) равна нулю, а z задается в системе координат, связанной с ЭИ (задача Римана–Гильберта). Для вычисления производной

$\partial z_a / \partial \tau(\chi, \tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_a(\chi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta\tau$ будут значения $\text{Im} \partial z_a / \partial \tau(\sigma_m, \tau_j) = q_m$. Для восстановления $\partial z_a / \partial \tau(\chi, \tau_j)$ используется формула Шварца, аналогичная (14).

Для вычисления производной $\partial z_c / \partial \tau(\xi, \tau_j)$ применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения $z_c(\xi, \tau_j)$. Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta\tau$ будут значения $\text{Im} \partial z_c / \partial \tau(\omega_m, \tau_j) = r_m$. Для восстановления $\partial z_c / \partial \tau(\xi, \tau_j)$ в предложенном методе используется формула Шварца, аналогичная (15).

Значения q_m, r_m определяются методом коллокаций по краевому условию (5) путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Далее производится шаг по времени по методу Эйлера и процесс повторяется.

Некоторые результаты численного моделирования обработки плоским ЭИ с выступом и впадиной в форме сегмента круга в приведены на рис. 10 для $\eta = \text{const}$ (h – высота расположения центра окружности, $\Delta\tau$ – шаг по времени).

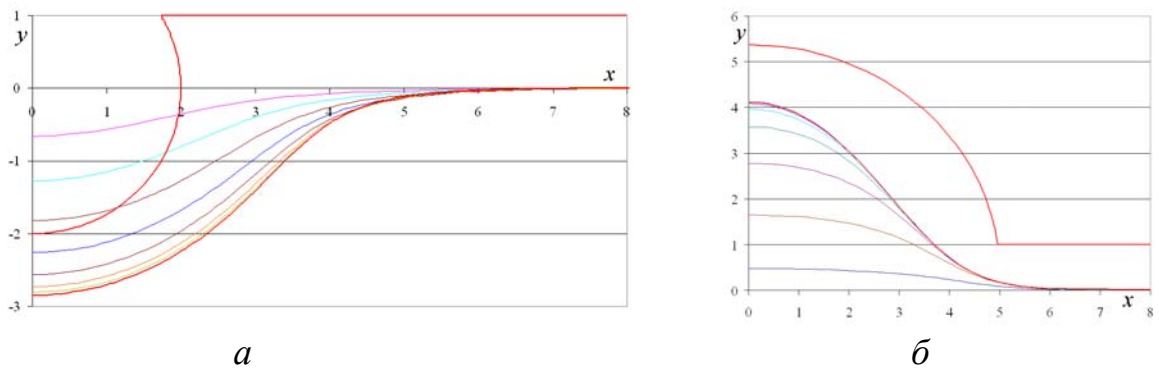


Рисунок 10 – Формы нестационарных поверхностей: $a - r=2, h=-1, \Delta\tau=1$;
 $b - r=5, h=-1, \Delta\tau=2$

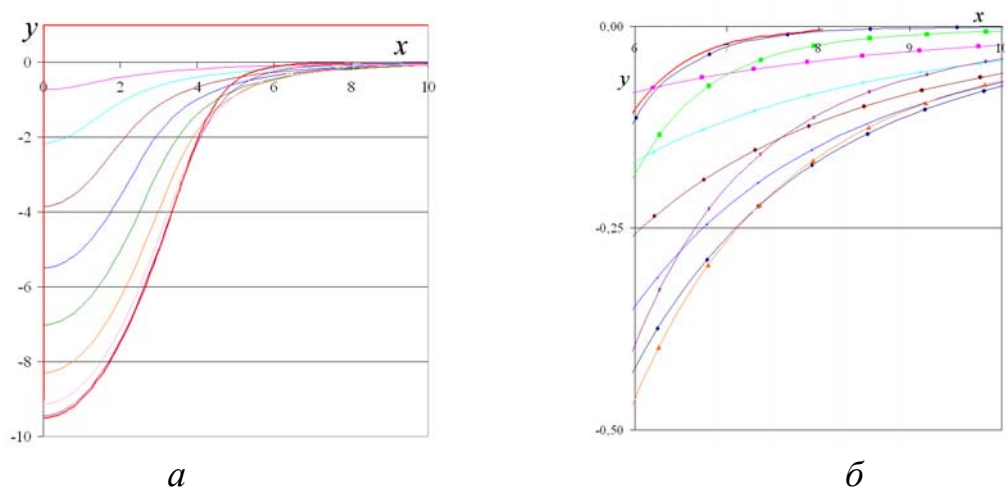


Рисунок 11 – Формы нестационарных поверхностей для выступа в форме вертикальной пластины при $L=10, \Delta\tau=2$: a – полная картина; b – фрагмент

Результаты численного моделирования обработки плоским ЭИ с выступом в форме вертикальной пластины длины L для $\eta = \text{const}$ приведены на рис. 11.

Рис. 11, б иллюстрирует длительный процесс установления стационарного решения вблизи угловой точки. Около 20 единиц безразмерного времени необходимо, чтобы форма приблизилась к стационарной. Следует отметить, что это в 2 раза больше L . Можно приближенно считать, что растворение на периферии начинается примерно при $\tau=10$, когда плоская часть ЭИ окажется на расстоянии 1 от поверхности заготовки. Далее растворение происходит со скоростью движения ЭИ и до момента $\tau=20$ растворится слой материала заготовки около 10 единиц. При прекращении процесса растворения ранее этого момента отличие формы от стационарной в данной области может оказаться существенной.

На рис. 12 приведены формы обрабатываемой поверхности для $r=5$, $\alpha=E_0/E_1=2$ и 1. Для $\alpha=1$ процесс устанавливается за конечное время.

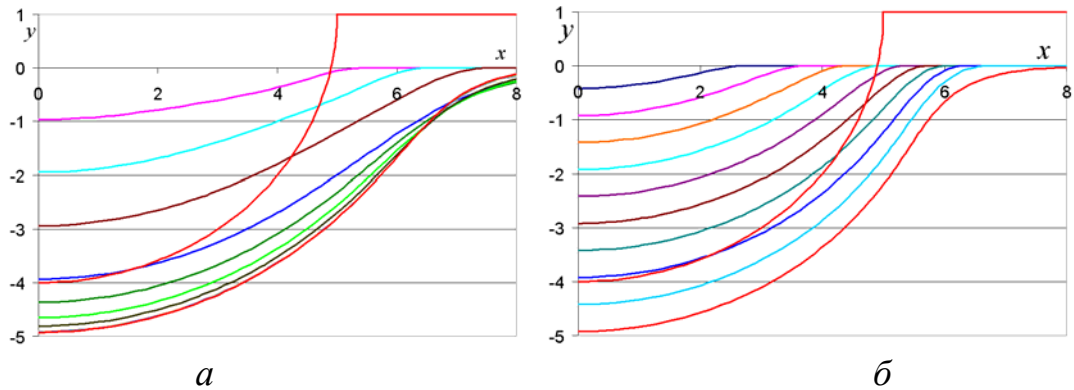


Рисунок 12 – Формы нестационарных поверхностей для выступа в форме полукруга при $r=5$, $\Delta\tau=1$; а – $\alpha=2$; б – $\alpha=1$

На рис. 13 приведены зависимости глубины выемки p на аноде от времени обработки для $r=2$ и $r=5$ при $\alpha=1, 2$ и ∞ . Видно, что максимальная скорость образования выемки наблюдается при $\alpha=1$. При $\alpha=2$ в начале процесса скорость примерно такая же, а затем начинает уменьшаться, так как начинается растворение материала на периферии.

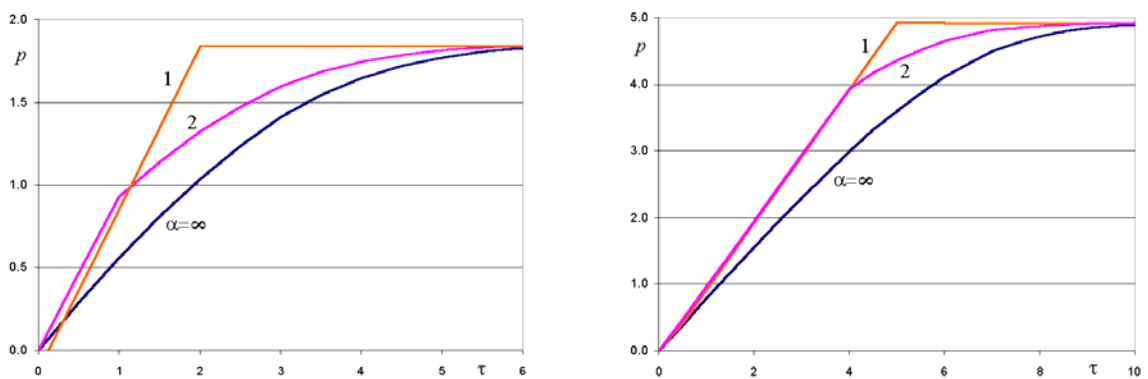


Рис. 13. Зависимости глубины выемки на аноде от времени обработки ($r=2$ и 5)

В главе 4 разработан метод моделирования нестационарного формообразования с помощью ЭИ в виде замкнутой ограниченной фигуры (рис. 14, а). Выберем в качестве параметрической переменную $\chi=\sigma+i\nu$ область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу ширины 1/2 (рис. 15, а).

Конформное отображение параметрической плоскости χ на плоскость комплексного потенциала удобнее определять через переменную ζ (рис. 14, в)

$$\chi = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \frac{p^{2m-1}}{p^{2m-1} - p^{-2m+1}} (\zeta^{2m-1} + \zeta^{-2m+1}).$$

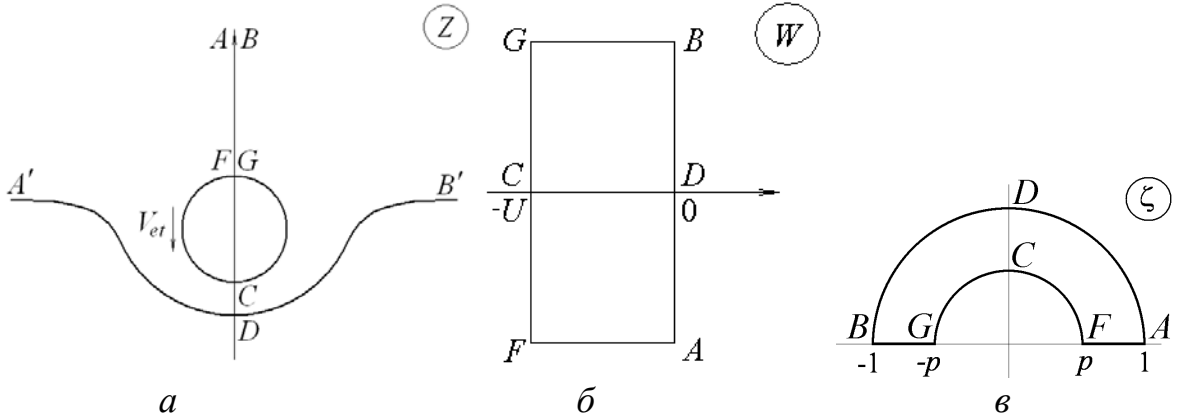


Рисунок 14 – Плоскости: *a* – физическая; *б* – комплексного потенциала; *в* – параметрическая

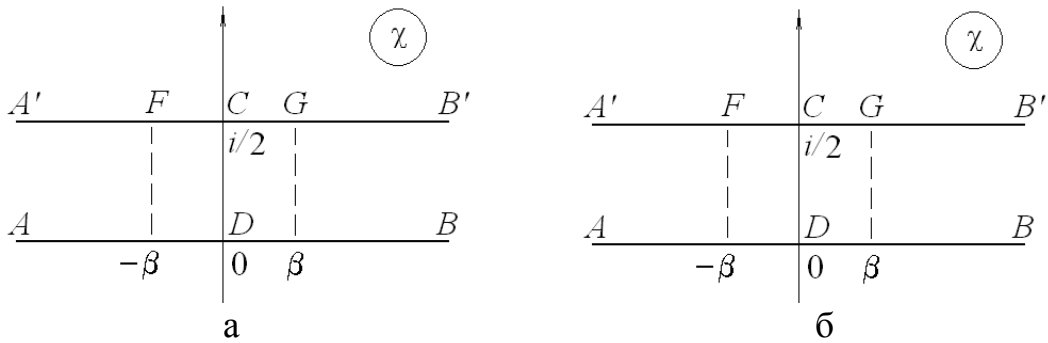


Рисунок 15 – Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ξ

Комплексный потенциал и его производная равны

$$W = -\frac{U}{\ln p} \left(\ln \zeta - i \frac{\pi}{2} \right), \quad \frac{dW}{d\chi} = -\frac{U}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости χ на область МЭП физической плоскости в неподвижной системе координат в виде

$$z(\chi, \tau) = g(\tau) \operatorname{sh} \pi \chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau),$$

где функция $z_0(\chi) = g \operatorname{sh} \pi \chi$ при $g > 0$ конформно отображает полосу плоскости χ на верхнюю полуплоскость с разрезом, проведенным вверх от точки $0 + i g$ до бесконечности; $z_a(\chi, \tau)$ – аналитическая в полосе D_χ (рис. 15, *a*) и непрерывная в ее замыкании функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при $\chi = \sigma + i/2$ $\operatorname{Re} z_a(\chi, \tau) = 0$); $z_c(\xi, \tau)$ – аналитическая в полосе D_ξ (рис. 15, *б*) и непрерывная в ее замыкании \bar{D}_ξ функция, предназначенная для описания формы ЭИ (при $\xi = \omega + i/2$ $\operatorname{Im} z_c(\xi, \tau) = 0$).

Функция $z_a(\chi, \tau)$ определяется, как и выше, значениями $\operatorname{Im} z_a(\sigma_m, \tau_j) = y_m$ на границе $\chi = \sigma$ в узловых точках σ_m ($m = 0, \dots, n$). Поскольку $z_a(\chi, \tau)$ – аналитическая функция, имеющая чисто мнимые значения на прямой $\operatorname{Im} \chi = 1/2$, анали-

тически продолжим ее вверх на полосу единичной ширины. Для определения функции $z_a(\chi, \tau)$ используем формулу Шварца

$$z_a(\chi, \tau) = \operatorname{sh} \pi \chi \int_0^{\infty} \operatorname{Im} z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} + \operatorname{sh} \pi \chi \int_0^{\infty} \operatorname{Im} z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \chi}. \quad (17)$$

При вычислении функции $z_c(\xi, \tau)$ искомыми будут значения $\operatorname{Re} z_c(\omega_m, \tau_j) = \bar{x}_m$ на границе $\xi = \omega$. Для восстановления функции $z_c(\xi, \tau)$ используем формулу Келдыша–Седова

$$z_c(\xi, \tau) = G(\xi) \left\{ \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{z_c(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{\operatorname{sh} \pi \omega}{\operatorname{ch} \pi \omega - \operatorname{ch} \pi \xi} d\omega + \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{z_c(\omega, \tau)}{G(\omega)} \right] \frac{\operatorname{sh} \pi \omega}{\operatorname{ch} \pi \omega + \operatorname{ch} \pi \xi} d\omega \right\}, \quad (18)$$

$$G(\xi) = \operatorname{sh}(\pi \chi) = \frac{i}{2} \left(\sqrt{\frac{e^{2\pi \xi} + e^{2\pi \beta}}{e^{2\pi \xi} e^{2\pi \beta} + 1}} + \sqrt{\frac{e^{2\pi \xi} e^{2\pi \beta} + 1}{e^{2\pi \xi} + e^{2\pi \beta}}} \right).$$

По полученным с помощью (18) значениям $y_c(\omega, \tau)$ строится сплайн $P_{y_c}(\omega)$, дифференцированием которого получается производная $\partial y_c / \partial \omega(\omega, \tau)$.

Для вычисления производных $\partial z_a / \partial \tau(\chi, \tau_j)$ и $\partial z_c / \partial \tau(\xi, \tau_j)$ (χ фиксировано) применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформных отображений $z_a(\chi, \tau_j)$ и $z_c(\xi, \tau_j)$.

Значения $\operatorname{Im} \partial z_a / \partial \tau(\sigma_m) = q_m$, $\operatorname{Im} \partial z_c / \partial \tau(\omega_m) = r_m$ в предложенном методе определяются методом коллокаций по краевому условию (5). Далее производится шаг по времени по методу предиктор-корректор или Эйлера.

На рис. 16 показаны формы обрабатываемой поверхности при $r=1$, $\alpha=2$ при различном времени обработки.

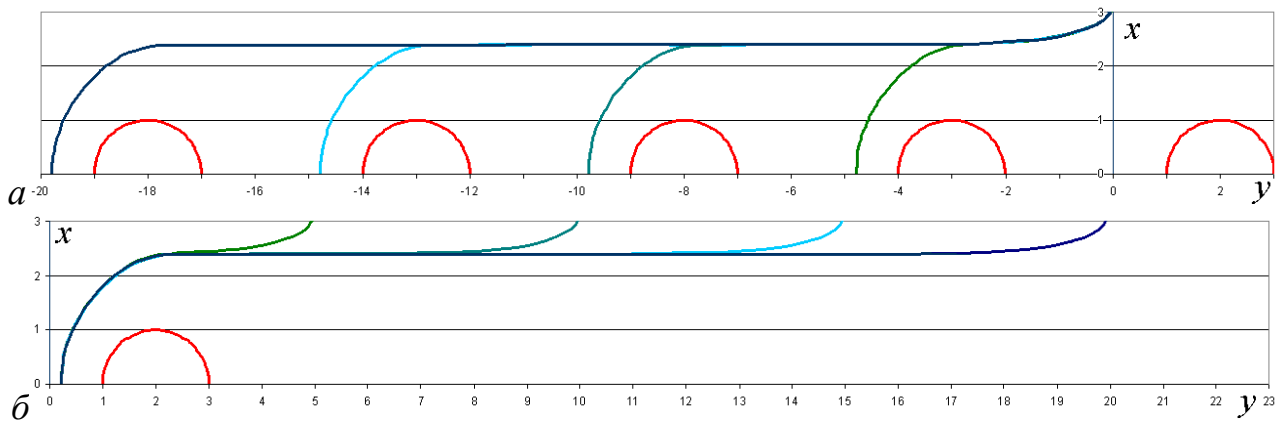


Рисунок 9 – Формы нестационарных поверхностей для выступа в форме полукруга при $r=1$, $\alpha=2$, $\Delta\tau=5$ в системе координат: a – неподвижной; b – связанной с ЭИ

В разд. 4.3 приводится описание комплекса программ трехуровневой структуры, включающего программы решения стационарных и нестационарных задач предложенными методами, программы обработки, проверки, сравнения, оценки погрешности результатов и преобразования информации к виду, удобному для использования на 3-м уровне – в программах, реализующих приближенные модели для практического использования.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработанный метод создания, обоснования и тестирования численных моделей дал возможность получать искомые параметры в условиях неполноты исходных данных, получать оценки погрешности двумя способами для проверки их непротиворечивости.

2. Разработаны численно-аналитические методы решения задач Хеле-Шоу, использующие сумму двух функций с областями определения, расположенными на различных параметрических плоскостях, формулу Келдыша–Седова, решение задачи Римана-Гильберта на каждом временном шаге, которые, в отличие от известных ранее методов решения таких задач, позволяют с точностью до 4 значащих цифр моделировать различные условия движения свободной границы при подвижной заданной границе негладкой криволинейной формы.

3. На основе предложенных методов разработан трехуровневый комплекс программ и проведены комплексные исследования, включающие предельные режимы обработки и соотношения геометрических параметров, решены задачи копирования сегмента круга, пластины, резки круглым и пластинчатым ЭИ. Показано, что вблизи угловых точек имеют место две стадии формообразования: грубая и окончательная, что требует удвоения времени обработки. Показано, что установление предельной формы происходит за конечное время, а стационарной – асимптотически по экспоненциальному закону. Впервые получены зависимости, наборы данных, позволяющие создать на их основе приближенные численные модели процессов формообразования, которые получены в удобном для применения виде интерполяционных зависимостей, позволяют при произвольных значениях геометрических параметров при незначительных затратах ресурсов с достаточной точностью (около 1 %) вычислять параметры формообразования и могут быть использованы на практике.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. Моделирование процесса формообразования выступов при электрохимической обработке / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова, А. Р. Маннапов // Вестник УГАТУ: науч. журн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. 2010. Т. 14, № 2 (37). С. 195–201.

2. Численная оценка параметров нестационарных процессов электрохимического формообразования / В. П. Житников, Р. Р. Муксимова, Н. М. Шерыхалина, С. С. Поречный // Труды ГОСНИТИ. 2010. Т. 106. С. 67–71.

3. Решение задачи нестационарной электрохимической обработки плоским электрод-инструментом с ограниченной неровностью / В. П. Житников, Р. Р. Муксимова // Вестник УГАТУ: науч. журн. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-та. 2011. Т. 15, № 1 (41). С. 113–118.

4. Задачи Хеле-Шоу с ограничениями на подвижность свободных границ / В. П. Житников, Р. Р. Муксимова, Н. М. Шерыхалина // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (3). С. 779–780.

В других изданиях

5. Механизм возникновения струйности на поверхности детали при импульсной электрохимической обработке вибрирующим электрод-инструментом / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова // Гидродинамика больших скоростей: матер. X Междунар. науч. шк. Чебоксары: изд-во ЧИМГОУ, 2008. С. 295–302.
6. Определение напряженности электрического поля в пространстве между двумя пластинчатыми полубесконечными электродами / Р. Р. Муксимова, Т. Р. Хадимуллин // Мавлютовские чтения: матер. Всеросс. молодежн. научн. конф.. Уфа: УГАТУ, 2008. Т. 5. С. 64–65.
7. Применение фильтрации численных результатов для увеличения надежности вычислений / Р. Р. Муксимова // Технические науки и моделирование: сб. ст. 3-й всеросс. шк.-сем. аспирантов и молодых ученых. Уфа: УГАТУ, 2008. Т. 2. С. 204–209.
8. Компьютерное моделирование образования макродефектов при электрохимической обработке / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова // Компьютерные науки и информационные технологии: матер. 10 Междунар. конф. CSIT'2008. Анталия, 2008. Т. 2. С. 218–220. (Статья на англ. яз.).
9. Стационарная электрохимическая обработка плоским электрод-инструментом с криволинейным выступом / Р. Р. Муксимова // Сб. ст. 4-й всеросс. шк.-сем. аспирантов и молодых ученых. Уфа: УГАТУ, 2009. Т. 2. С. 259–262.
10. Стационарная электрохимическая обработка плоским электрод-инструментом с полукруглым выступом / Р. Р. Муксимова // Всеросс. молодежн. научн. конф. «Мавлютовские чтения»: сб. тез. докл. Уфа: УГАТУ, 2009. Т. 5. С. 33–35.
11. Стационарная электрохимическая обработка прямолинейным ЭИ с полукруглым выступом / Р. Р. Муксимова, М. Н. Касюк, Р. Р. Шаймарданов // Компьютерные науки и информационные технологии: матер. 11 Междунар. конф. CSIT'2009. Крит, 2009. Т. 3. С. 28–31. (Статья на англ. яз.).
12. Моделирование процессов нестационарного электрохимического формообразования применительно к прецизионным технологиям / В. П. Житников, Р. Р. Муксимова, Е. М. Ошмарина // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, изд-во КГУ, 2010. Т. 42. С. 99–122.
13. Исследование параметров нестационарных процессов электрохимического формообразования уплотнений ГТД (с оценкой погрешностей численного решения) / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова // Решетневские чтения: матер. XIV Междунар. науч. конф. Красноярск: СибГАУ, 2010. Т. 2. С. 388–389.
14. Нестационарная электрохимическая обработка плоским полубесконечным электродом-инструментом / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова, Е. М. Ошмарина // Образование и наука – производству: сб. тр. межд. научно-техн. и образовательной конф. Набережные Челны: изд-во КамПИ, 2010. Ч. 1. Кн. 1. С. 136–138.
15. Моделирование процесса формообразования выступов при электрохимической обработке / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова, Ю. Ю. Скорульская // Образование и наука – производству: сб. тр. межд. научно-техн. и образовательной конф. Набережные Челны: изд-во КамПИ, 2010. Ч. 1. Кн. 1. С. 139–142.

16. Решение задачи о стационарной электрохимической обработке плоским конечным электрод-инструментом с помощью разложения в ряд / Ю. Ю. Скорульская, Р. Р. Муксимова, Е. М. Ошмарина // Образование и наука – производству: сб. тр. межд. научно-техн. и образовательной конф. Набережные Челны: изд-во КамПИ, 2010. Ч. 1. Кн. 1 С. 148–151.

17. Стационарное электрохимическое формообразование горизонтальной пластиной с изолированной верхней частью / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова // Актуальные проблемы науки и техники: сб. тр. 5-й Всероссийск. зимн. шк.-семинара аспирантов и молодых ученых, 17–20 февраля 2010. Уфа: УГАТУ, 2010. Т. 3. С. 268–271.

18. Решение нестационарной задачи об электрохимической резке круглым электрод-инструментом / Р. Р. Муксимова // Всерос. молодежн. научн. конф. «Мавлютовские чтения»: сб. тез. докл. Уфа: УГАТУ, 2010. Т. 5. С. 22–24.

19. Решение задачи нестационарной электрохимической обработки плоским электродом-инструментом с ограниченной неровностью / Р.Р. Муксимова, А.А. Ошмарин // Лобачевские чтения: сб. тр. 9-й молодежн. научн. школы-конф., 2010. Т. 40. Казань: Казан. матем. общ-во. С. 237–241.

20. Моделирование нестационарной электрохимической обработки полукруглым электрод-инструментом / Р. Р. Муксимова // XXXVI Гагаринские чтения: науч. тр. Междунар. молодежн. науч. конф. М.: МАТИ, 2010. Т. 5. С. 114–116.

21. Обтекание мягкой оболочки вблизи экрана / Р. Р. Муксимова, М. Ю. Подымова // Мавлютовские чтения: матер. Всерос. молодежн. научн. конф., 2010. Т.5. Уфа: УГАТУ. С. 20–22.

22. Методы решения нестационарных задач электрохимического формообразования / Р. Р. Муксимова, С. С. Поречный // Сб. статей 6-й Всероссийск. зимн. шк.-семинара аспирантов и молодых ученых. Уфа: УГАТУ, 2011. Т. 2. С. 325–329.

23. Электрохимическая размерная обработка плоским подвижным электрод-инструментом / С. С. Поречный, Р. Р. Муксимова // Мавлютовские чтения: сб. трудов Всерос. научн.-техн. конф. Уфа: УГАТУ, 2011. Т. 5. С. 138–142.

24. Формообразование границ при нестационарной электрохимической обработке круглым электрод-инструментом / В. П. Житников, Р. Р. Муксимова, А. Р. Салимьянов // Задачи со свободными границами: сб. матер. 4-й Всероссийск. конф., Бийск. Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 2011. С. 36–37.

25. Свид. об офиц. рег. программы для ЭВМ РФ № 2011619286. Расчет формы поверхности при нестационарной электрохимической обработке / Р. Р. Муксимова, А. Р. Салимьянов. Зарег. М.: Роспатент, 2011.

26. Свид. об офиц. рег. программы для ЭВМ РФ № 2012610168. Моделирование нестационарной электрохимической обработки круглым электрод-инструментом / В. П. Житников, Р. Р. Муксимова. Зарег. М.: Роспатент. 2012.

27. Свид. об офиц. рег. программы для ЭВМ РФ № 2012610169. Интерполяционная модель образования зазора при электрохимической обработке / В. П. Житников, Р.Р. Муксимова. Зарег. М.: Роспатент. 2012.