

**Белогрудов Александр Николаевич**

**УГАТУ**

**доцент кафедры математики**

**Текстовые задачи экономического типа**

**2019г.**

**Типы рассматриваемых задач:**

- дискретные экономические модели (банковский процент, вклады и кредиты);
- непрерывные модели (оптимизационные задачи).

**Ресурсы:**

<http://alexlarin.net/>

<http://reshuege.ru/>

### Задачи на банковский процент. Аннуитентные(равные) платежи.

**Пример 1.** (Типовые тестовые задания по математике, под ред. И.В. Яценко. 2015 г.) 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

**Ответ:** на 806,4 т.р.

### Вспомогательные формулы:

Изменение суммы долга:

Дата	31.01.14	31.01.15	30.01.16	31.01.16	30.01.17
Долг	$S$	$1,2S$	$1,2S - P$	$1,2(1,2S - P)$	$1,2(1,2S - P) - P$

Дата	31.01.17	30.01.18
Долг	$1,2(1,2(1,2S - P) - P)$	$1,2(1,2(1,2S - P) - P) - P$

### Задачи на банковский процент. Дифференцированные платежи.

**Пример 2.** (демо-вариант для ЕГЭ-2017) 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Число, месяц	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн. руб.

**Ответ:** 7%.

### Вспомогательные формулы:

Дата	15.01	01.02	02.02-14.02	15.02	01.03
Долг	$S$	$(1 + \frac{r}{100})S$		$\frac{6}{10}S$	$(1 + \frac{r}{100})\frac{6}{10}S$
Выплата			$\frac{r}{100}S + \frac{4}{10}S$		

Дата	02.03-14.03	15.03	01.04	02.04-14.04	15.04
Долг		$\frac{4}{10}S$	$(1 + \frac{r}{100})\frac{4}{10}S$		$\frac{3}{10}S$
Выплата	$\frac{r}{100}\frac{6}{10}S + \frac{2}{10}S$			$\frac{r}{100}\frac{4}{10}S + \frac{1}{10}S$	

Сумма долга:  $S, \frac{6}{10}S, \frac{4}{10}S, \frac{3}{10}S, \frac{2}{10}S, \frac{1}{10}S, 0$

Проценты на долг:  $(1 + \frac{r}{100})S, (1 + \frac{r}{100})\frac{6}{10}S, \dots, (1 + \frac{r}{100})\frac{1}{10}S$

Выплаты:  $(\frac{r}{100}S + \frac{4}{10}S), (\frac{r}{100}\frac{6}{10}S + \frac{2}{10}S), \dots, (\frac{r}{100}\frac{1}{10}S + \frac{1}{10}S)$

### Задачи на оптимизацию доходов/расходов.

**Пример 3. (Задание № 509025, reshuege.ru)** Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

**Ответ: сразу после окончания 7-го года(на 8-м году).**

**Пример 4. (ЕГЭ-2015)** Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно  $t^2$  часов в неделю, то за эту неделю они производят  $t$  единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

**Ответ: 90 ед.**

### Вспомогательные формулы:

Производные элементарных функций  $f'(x)$ :

степенная функция:  $(x^p)' = px^{p-1}$  показательная функция:  $(a^x)' = a^x \ln a$

Правила дифференцирования:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

### Другие задачи на оптимизацию.

**Пример 5. (Задание № 513431, reshuege.ru) Дискретный случай.** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число  $n$  млн. рублей в первый и второй годы, а также целое число  $m$  млн. рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения  $n$  и  $m$ , при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся. Для всех возможных вариантов  $n$  и  $m$  найдите вариант с наименьшей суммой доложений в проект.

**Ответ:  $n=4, m=3$ .**

**Пример 6. (Задание № 512381, reshuege.ru) Непрерывный случай.** Производство  $x$  тыс. единиц продукции обходится в  $q = 0,5x^2 + 2x + 5$  млн рублей в год. При цене  $p$  тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет  $px - q$ . При каком наименьшем значении  $p$  через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

**Пример 7. (вариант № 260 alexlarin.net)** Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более, чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее, чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

**Пример 8. (вариант № 252 alexlarin.net)** В офисном здании 8 этажей, на каждом из которых, кроме первого, находится кабинет начальника отдела. Управляющая жилищная компания объявила, что в день профилактического ремонта лифта он сделает всего один подъем сразу всех начальников на один, указанный ими этаж. После подъема начальники будут вынуждены идти в свои кабинеты по лестнице. В качестве компенсации за причиненные неудобства за каждый необходимый подъем на очередной этаж по лестнице каждому начальнику будет начислено 200 рублей,

а за каждый аналогичный спуск – 100 рублей. Этаж необходимо выбрать так, чтобы общая сумма компенсаций была минимальной. Укажите эту сумму.

**Пример 9. (Задание № 509067, reshuege.ru) Дискретный случай.** В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

**Ответ: (2 м + 20 д) в первом и (21 м + 1 д) во втором классе.**

## **Дополнительные задачи для самостоятельного решения**

**Пример 10. (ЕГЭ-2015)** 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $r$ .

**Ответ: 3%.**

### **Вспомогательные формулы:**

Сумма долга:  $S, \frac{18}{19}S, \frac{17}{19}S, \dots, \frac{2}{19}S, \frac{1}{19}S$

Проценты и долг:  $(1 + \frac{r}{100})S, (1 + \frac{r}{100})\frac{18}{19}S, \dots, (1 + \frac{r}{100})\frac{1}{19}S$

Выплаты:  $(\frac{r}{100}S + \frac{1}{19}S), (\frac{r}{100}\frac{18}{19}S + \frac{1}{19}S), \dots, (\frac{r}{100}\frac{1}{19}S + \frac{1}{19}S)$

**Пример 11. (Задание № 520941, reshuege.ru)** 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?

**Пример 12. (Задание № 519363, reshuege.ru)** В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на  $r\%$ ;
- с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 56 595 рублей, или за два года равными платежами по 81 095 рублей. Найдите  $r$ .

**Пример 13. (Задание № 513297, reshuege.ru)** В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи  $x$  кг алюминия в день требуется  $x^2$  человеко-часов труда, а для добычи  $y$  кг никеля в день требуется  $y^2$  человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава в день. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

**Пример 14. (Задание № 511234, reshuege.ru)** Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние?

**Пример 15. (Задание № 515785, reshuege.ru)** У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

**Пример 16. (Задание № 518915, reshuege.ru)** Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство  $x$  тыс. единиц продукции на таком заводе равны  $0,5x^2 + x + 9$  млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит  $px - (0,5x^2 + x + 9)$ . Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

**Пример 17. (Задание № 508236, reshuege.ru)** В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном

должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

**Пример 18. (вариант № 262 alexlarin.net)** Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет одно поле втрое быстрее, чем второй, а третьему на ту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все тракторы начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое трактору требуется сорок минут.