На правах рукописи

Аитбаева Айгуль Азаматовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВИДА И ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦА СТЕРЖНЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО КОЛЕБАНИЙ

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Уфа — 2018

Работа выполнена в ФГБУН Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Урманчеев Саид Федорович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Болотнов Анатолий Миронович,
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»,
и.о. зав. кафедрой информационных технологий и компьютерной математики

доктор физико-математических наук, доцент
Дильман Валерий Лейзерович,
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»,
зав. кафедрой математического анализа и методики преподавания математики

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», г. Москва

Защита состоится «18» апреля 2018 г. в 10^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 на базе ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» и на сайте www.ugatu.su.

Автореферат разослан «   »   2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор   Г.Т. Булгакова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. На практике, при эксплуатации стержней, под действием внешних возбуждений могут нарушиться заложенные в проект граничные условия на концах стержня. Поэтому возникает необходимость решения математической задачи идентификации краевых условий по собственным частотам колебаний (создания неразрушающих методов определения степени нарушения первоначальных граничных условий).

Обратные задачи, решаемые в работе, важны также при создании безопасных для здоровья человека технических систем. Дело в том, что технические системы, созданные без учета влияния собственных частот, могут пагубно влиять на здоровье человека. Причиной этого могут оказаться инфразвуковые колебания. При создании приборов важно уходить от инфразвуковых частот, которые попадают в резонанс с низкими резонансными частотами органов человека. Изложенные факты требуют создания таких закреплений элементов технических систем, которые давали бы нужный безопасный диапазон частот колебаний основных деталей. В математической постановке задача создания таких закреплений сводится к той же математической задаче идентификации краевых условий по заданным собственным частотам.

Цель работы — разработка математической модели, численных методов и комплексов программ для решения задач идентификации вида и параметров закрепления конца стержня, а также для определения коэффициента податливости (коэффициента постели) упругого основания балки по минимальному числу собственных частот колебаний.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1. разработать математическую модель видов и параметров закрепления одного из концов стержня (п.1 паспорта специальности 05.13.18);

2. разработать численно-аналитические методы решения задач идентификации вида и параметров закрепления конца стержня по минимальному числу собственных частот, а также поиска коэффициента постели в случае когда стержень лежит на упругом основании (п.2 паспорта специальности 05.13.18);

3. разработать комплекс программ для решения задач идентификации вида и параметров закрепления конца стержня по минимальному числу собственных частот колебаний (п.4 и п.8 паспорта специальности 05.13.18).

Метод исследования. Предложены численные методы однозначной идентификации краевых условий по минимальному числу собственных значений (метод дополнительной неизвестной величины, метод выбора альтернативных решений на основе соотношений Плюккера, метод сведения к нелинейной системе, имеющей единственное решение). Использованы методы спектральной теории дифференциальных уравнений, методы теории обратных и некорректных задач. Разработана программа для численных расчетов.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Математическая модель для диагностирования граничных условий одного из концов стержня.

2. Численные методы однозначной идентификации краевых условий стержня по минимальному числу собственных значений. Многокомпонентный анализ численных экспериментов.

3. Результаты решения задач однозначной идентификации вида и параметров закрепления одного из концов стержня, а также нахождения коэффициента постели по минимальному числу собственных частот колебаний.

4. Алгоритм и комплекс программ в среде Maple для решения изучаемых задач идентификации.

Научная новизна.

1. Предложена новая математическая модель краевых условий в виде матрицы, определяемой с точностью до линейных преобразований ее строк. Эта модель отличается от канонических краевых условий тем, что неизвестными коэффициентами могут быть все коэффициенты краевых условий. Предложенная модель позволяет диагностировать не только параметры краевых условий известного вида, но и сам вид краевого условия (п.1 паспорта специальности 05.13.18).

2. Разработанные методы (метод дополнительной неизвестной величины, метод выбора альтернативных решений на основе соотношений Плюккера, метод сведения к нелинейной системе, имеющей единственное решение) позволяют однозначно определить вид и параметры закрепления одного из концов стержня по минимальному числу собственных частот его колебаний. Эти методы отличаются от используемых ранее тем, что сводят задачу идентификации краевых условий к системе с меньшим числом уравнений. Проведена численная фильтрация результатов приведенных в работе примеров, которая позволила найти эмпирические числа обусловленности (п.2 паспорта специальности 05.13.18).

3. Впервые показано, что по трем собственным частотам можно однозначно идентифицировать один из десяти видов закреплений (заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка, пять видов упругого закрепления, инерционный элемент на конце). Данный результат отличается от полученного ранее тем, что к идентифицируемым краевым условиям добавляется инерционный элемент на конце. Это позволяет идентифицировать

не девять, а десять видов краевых условий по тому же числу собственных частот.

Впервые показано, что по пяти собственным значениям можно однозначно определить уже один из одиннадцати видов закреплений (добавлен случай, когда инерционный элемент упруго закреплен на двух пружинках). Этот результат отличается от полученного ранее тем, что в предыдущем результате для однозначной идентификации использовался бесконечный набор собственных частот. Полученный результат позволяет однозначно идентифицировать одиннадцать видов краевых условий по минимальному числу собственных частот.

Впервые показано, что для однозначной идентификации краевых условий одного из концов стержня с n неизвестными параметрами ($n = 2,3,4$) достаточно использовать $n+1$ собственную частоту. Этот результат отличается от результатов, полученных ранее тем, что для однозначной идентификации используется меньшее число собственных частот, что позволяет однозначно идентифицировать краевые условия по минимальному числу собственных частот. Приведены контрпримеры, показывающие, что при меньшем числе собственных частот, идентификация становится неоднозначной. Впервые решена задача идентификации коэффициента постели упругого основания балки по одной собственной частоте колебаний (п.2 паспорта специальности 05.13.18).

4. Разработан комплекс программ для численного решения рассматриваемых в диссертации прямых и обратных задач (п.4 и п.8 паспорта специальности 05.13.18).

Практическая и теоретическая значимость диссертационной работы. Элементами многих технических конструкций, механизмов и устройств являются стержни и балки. Поэтому, на сегодняшний день, стало важным изучение процессов протекающих в различных механических системах. Особую значимость имеют колебания и вибрации, которые в силу непредвиденности могут вызвать погрешности в работе машин или устройствах, увеличить износ и заметно понизить надежность, возможны также разрушения и аварии. В связи с этим интенсивно развивается акустическое диагностирование, решающее задачи оперативного контроля технических конструкций, по собственным частотам колебаний. На сегодняшний день учеными достаточно хорошо разработаны акустические методы обнаружения трещин, определения формы области или размера предмета. Однако задачи по диагностике состояния закреплений стержней и балок акустическими методами стали решаться относительно недавно. Задача идентификации краевых условий стержней по собственным частотам свободных колебаний возникает как в связи с задачами неразрушающей диагностики, так и при создании виброзащитных и безопасных для здоровья технических систем.

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью их аналитических доказательств. Численные алгоритмы апробированы на известных решениях других авторов.

Апробация диссертационной работы. Основные результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на всероссийских, международных конференциях и семинарах: 1. Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2009, 2011, 2012, 2014, 2015 гг.); 2. Международная конференция«Спектральная теория операторов и ее приложения» посвящается памяти профессора А.Г. Костюченко (1930-2010) (г. Уфа, 2011 г.); 3. Всероссийская научная конференция «Обратные задачи и их приложения», посвященная 100-летию со дня рождения проф. М.Т. Нужина (г. Казань, 2014 г.); 4. Всероссийская научно-практическая конференция «Математическое моделирование на основе статистических методов» (г. Бирск, 2015 г.); 5. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Казань, 2015 г.); 6. III Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (г. Уфа, 2015 г.); 7. Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам (г. Москва, 2015 г.); 8. Научный семинар по обратным задачам в науке и технике (рук. Спивак С.И., Ахтямов А.М., Юмагулов М.Г.); 9. Научный семинар по обратным задачам теории колебаний (рук. Ахтямов А.М.); 10. Научный семинар лаборатории «Механика твердого тела» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН (рук. член-корр. РАН Ильгамов М.А.); 11. Научный семинар «Обратные задачи математической физики» в МГУ им. М.В. Ломоносова (рук. Бакушинский А.Б., Тихонравов А.В, Ягола А.Г.).

Исследования были выполнены при поддержке грантов РФФИ: 11-01-97002-р_а «Обратные спектральные задачи и акустическая диагностика» (2011-2013 гг.), 14-01-97010-р_а «Обратные спектральные задачи и акустическая диагностика механических систем и неоднородных сред» (2014-2016 гг.), 15-31-50973-мол_нр «Решение некорректных граничных задач теории колебаний» (2015 г.), 16-31-00113-мол_а «Идентификация полиномов и целых функций от спектрального параметра, входящих в краевые условия, по собственным значениям» (2016-2017 гг.), 16-31-00077-мол_а «Граничные обратные задачи теории колебаний распределенных механических систем» (2016-2017 гг.), 17-41-020230-р_а «Математические моделирование и диагностика технических систем, основанные на решении современных обратных задач теории колебаний» (2017-2019 гг.) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (2014 г.).

Личный вклад. Ранее А.М. Ахтямовым и А.В. Муфтаховым был разработан метод идентификации краевых условий стержня по собственным частотам его колебаний. Однако число собственных частот, используемых для однозначной идентификации краевых условий одного из концов стержня, было избыточным (оно было на единицу меньше числа неизвестных миноров матрицы коэффициентов краевых условий). А.А. Аитбаевой удалось уменьшить до минимума число собственных частот, используемых для однозначной идентификации. В совместных с А.М. Ахтямовым и А.В. Муфтаховым работах А.А. Аитбаевой принадлежит разработка метода однозначной идентификации краевых условий на одном из концов стержня по минимальному числу собственных частот, доказательство соответствующих теорем, отыскание примеров, показывающих, что использование меньшего числа собственных частот приводит к неоднозначной идентификации краевых условий одного из концов стержня, анализ численных экспериментов с помощью методов многокомпонентной фильтрации, а также разработка алгоритма и комплексов программ.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]–[20], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 10 – материалы конференций, имеется одна зарегистрированная программа.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель и ставятся задачи работы, отмечена научная новизна и теоретическая ценность полученных результатов, приведены сведения об апробации работы и обзор научной литературы по изучаемой проблеме. Проведен анализ работ близких к теме диссертации из зарубежных и отечественных источников.

Первая глава посвящена задаче идентификации краевых условий (заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка, пять видов упругого закрепления, инерционный элемент на конце) одного из концов стержня по трем собственным частотам его колебаний. В данной главе приведен новый численный метод решения задач идентификации краевых условий, основанный на выборе альтернативных решений с помощью соотношений Плюккера.

Изложение метода задачи проводится для случая когда «правый» конец $X = L$, а «левый» конец заделан: $X = 0, \quad U(X,t) = \frac{\partial U(X,t)}{\partial x} = 0$, где $U = U(X,t)$ - прогиб оси балки.

Для решения используется уравнение свободных изгибных колебаний однородного стержня с плотностью ρ, площадью поперечного сечения F и постоянной жесткостью на изгиб EI:

$$EI\frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4} + \rho F\frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

Начальные условия: $U(X,0) = f(X), \ \frac{\partial U(X,0)}{\partial t} = g(X), \ f(X), \ g(X)$ - функции, определяющие начальное положение оси стержня.

Вводя обозначения $x = X/L$, $u = U/L$, выше приведенное уравнение и краевое условие на заделанном конце приводится к виду:

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\rho F L^4}{EI}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$x = 0$: $\ u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$

Основные типы граничных условий на правом конце (при $x = 1$) записываются в следующем виде: 1) заделка $u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 2) свободное опирание $u = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; 3) свободный конец $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; 4) плавающая заделка $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 5)-9) различные виды упругого закрепления: 5) $EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_1 u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 6) $u = 0, \ EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 7) $EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_1 u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; 8) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \ EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 9) $EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c_1 u = 0, \ EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 10) сосредоточенный инерционный элемент на конце

$$EI\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad EI\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -I_1\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}.$$

В общем виде эти условия можно записать так:

$$\begin{array}{l} b_{11}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + b_{15} u + b_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ b_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_{23}\frac{\partial u}{\partial x} + b_{24}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = 0 \end{array} \qquad (x = 1). \tag{2}$$

Поставленная выше задача о свободных изгибных колебаниях стержня заменой $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ сводится к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad \lambda^4 = \rho F\omega^2/(EI) \tag{3}$$

$$\begin{gathered} Y_1(y) = y(0) = 0, \quad Y_2(y) = y'(0) = 0, \\ Y_3(y) = 0, \quad Y_4(y) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь использованы линейные формы, характеризующие закрепление в точке $x = 1$.

$$\begin{gathered} Y_3(y) = a_{11} y'''(1) + \left(a_{15} - a_{16}\lambda^4\right) y(1), \\ Y_4(y) = a_{22} y''(1) + \left(a_{23} - a_{24}\lambda^4\right) y'(1) \end{gathered} \tag{5}$$

$$\left(a_{11} = b_{11},\ a_{15} = b_{15}L^3, a_{16} = b_{16}L^3, a_{22} = b_{22},\ a_{23} = b_{23}L,\ a_{24} = b_{24}L\right)$$

В соответствие с физическим смыслом задачи для основных типов граничных условий при $x = 1$ коэффициенты a_{ij} неотрицательны.

Сформулируем соответствующую обратную задачу: по собственным частотам колебаний стержня найти неизвестные коэффициенты в выражениях (5) определяющие краевые условия.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $Y_3(y)$ и $Y_4(y)$ через A:

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & -a_{16} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -a_{24} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{6}$$

Через M_{ij} обозначим миноры второго порядка этой матрицы, составленные из ее i-го j-го столбцов.

Сформулируем обратную задачу: *коэффициенты a_{ij} форм $Y_3(y)$ и $Y_4(y)$ задачи (3), (4) - неизвестны; ранг матрицы (6) равен двум; известны отличные от нуля собственные значения λ_k задачи (3), (4); требуется восстановить матрицу (6) с точностью до линейных преобразований строк.*

Уравнение для определения собственных значений задачи (3), (4) получают из равенства нулю характеристического определителя, который можно представить в виде линейной комбинации миноров матрицы A

$$\begin{gathered} \Delta(\lambda) \equiv M_{12} f_{12}(\lambda) + M_{13} f_{13}(\lambda) + M_{14} f_{14}(\lambda) + M_{25} f_{25}(\lambda) + \\ + M_{26} f_{26}(\lambda) + M_{35} f_{35}(\lambda) + M_{46} f_{46}(\lambda) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} f_{12} = -\tfrac{\xi^+}{2},\ f_{13} = -\tfrac{\eta^-}{2},\ f_{14} = \lambda^4 f_{13},\ f_{25} = -\tfrac{\eta^-}{2\lambda^3},\ f_{26} = \lambda^4 f_{25},\ f_{35} = -\tfrac{\xi^-}{2\lambda^4}, \\ f_{46} = \lambda^8 f_{35},\ \xi^\pm = \cos\lambda\cosh\lambda \pm 1,\ \eta^\pm = \cos\lambda\sinh\lambda \pm \sin\lambda\cosh\lambda. \end{gathered}$$

В терминах характеристического определителя (7) задачу идентификации краевых условий по собственным частотам можно сформулировать следующим образом: *коэффициенты a_{ij} матрицы A неизвестны; ранг матрицы A*

равен двум; известны ненулевые корни λ_k характеристического определителя (7). Требуется идентифицировать матрицу A с точностью до линейных преобразований строк.

Суть метода решения задачи состоит в представлении матрицы A в виде альтернативных матриц A_1 для закреплений типа 1-9 и A_2 для закрепления типа 10. Найдя эти матрицы и помощью так называемых соотношений Плюккера, из двух найденных решений, выбирается единственное. Матрицы A_1 и A_2 имеют вид:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{16} \\ 0 & a_{22} & 0 & -a_{24} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Задача идентификации матрицы A_1 (A_2) эквивалентна идентификации матрицы A_1^0 (A_2^0) размера 2×4, составленной из первого, второго, третьего и пятого столбцов матрицы A_1 (из первого, второго, четвертого и шестого столбцов матрицы A_2).

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – три собственных значения задачи (2)–(4), F_1 и F_2 матрицы вида:

$$F_k = \begin{Vmatrix} f_{12}(\lambda_1) & f_{1l}(\lambda_1) & f_{2m}(\lambda_1) & f_{lm}(\lambda_1) \\ f_{12}(\lambda_2) & f_{1l}(\lambda_2) & f_{2m}(\lambda_2) & f_{lm}(\lambda_2) \\ f_{12}(\lambda_3) & f_{1l}(\lambda_3) & f_{2m}(\lambda_3) & f_{lm}(\lambda_3) \end{Vmatrix},$$

где $k = 1{,}2, \quad l = 2 + k, \quad m = 4 + k$.

Сформулирована и доказана следующая теорема:

Теорема 1. Если $rank A = 2$, $rank F_1 = rank F_2 = 3$, тогда краевые условия 1–10 идентифицируются однозначно по трем различным собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$.

Рассмотрим пример решения задачи акустической диагностики.

Пример 1. Дан алюминиевый стержень со свободным левым концом длиной $L = 1832\ mm$, шириной 50 mm и высотой 25 mm. Известны модуль упругости $EI = 69{,}79\ GN/m^2$ и плотность стержня $\rho = 2600\ kg/m^3$. Частотомером были замерены собственные частоты: $\omega_1 = 40{,}000\ Hz$, $\omega_2 = 109{,}688\ Hz$, $\omega_3 = 215{,}000\ Hz$. Соответствующие собственные значения равны $\lambda_1 = 4{,}749695$, $\lambda_2 = 7{,}865300$, $\lambda_3 = 11{,}011715$. Требуется определить вид краевого условия на правом конце. Для данных значений получим следующую матрицу краевых условий:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Это означает, что что на правом конце реализуется третий вид закрепления «свободный конец». Найденный результат соответствует экспериментальным данным, которые были получены другими авторами.

Далее рассмотрим пример решения задачи по созданию безопасных для здоровья человека технически систем.

Пример 2. Рассмотрим стержень примера 1. Если взять следующие краевые условия:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$y'''(1) + 3y(1) = 0, \quad y''(1) + 5y'(1) = 0,$$

то получим следующие собственные частоты и соответствующие им собственные значения: $\omega_1 = 7{,}072641\ Hz$, $\omega_2 = 46{,}983461\ Hz$, $\omega_3 = 119{,}5529442\ Hz$, $\lambda_1 = 1{,}997223$, $\lambda_2 = 5{,}147641$, $\lambda_3 = 8{,}211375$. Первая собственная частота попадает в резонанс с низкими резонансными частотами почек 6–8 Гц.

Мы можем уйти от этих нежелательных частот, задав другие частоты. Зададим безопасные частоты: $\omega_1 = 41{,}628051\ Hz$, $\omega_2 = 113{,}913984\ Hz$, $\omega_3 = 219{,}749822\ Hz$. Соответствующие собственные значения равны $\lambda_1 = 4{,}845390$, $\lambda_2 = 8{,}015382$, $\lambda_3 = 11{,}132687$. Решением будет матрица:

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Это означает, что искомые краевые условия имеют вид: $y'''(1) + 20y(1) = 0, \quad y''(1) + 2y'(1) = 0$, т.е. на правом конце стержня реализуется упругое закрепление.

Таким образом, от нежелательных частот мы можем уйти изменив краевое условие, например, как было показано в примере 2, взять другие коэффициенты жесткостей пружинок.

Вычислим отношение погрешности вычислений к погрешности исходных данных (эмпирическое число обусловленности). Для коэффициента a_{15}, при поочередном изменении первого, второго и третьего собственного значения, эти числа будут равными соответственно $|-25|$, $|-350|$, $|-331|$. На основе этих данных можно построить погрешностную модель метода вычислений: $\Delta_{a_{15}} = -25\Delta_{\lambda_1} - 350\Delta_{\lambda_2} - 331\Delta_{\lambda_3}$. При $|\Delta_{\lambda_1}| \le \Delta_1$, $|\Delta_{\lambda_2}| \le \Delta_2$, $|\Delta_{\lambda_3}| \le \Delta_3$ оценка погрешности имеет вид: $\Delta_{a_{15}} \le 25\Delta_1 + 350\Delta_2 + 331\Delta_3$.

Для коэффициента a_{23}, при поочередном изменении первого, второго и третьего собственного значения, эмпирические числа обусловленности будут равными соответственно $|-56|$, $|1346|$, $|-1281|$. Погрешностная модель имеет вид: $\Delta_{a_{23}} = -56\Delta_{\lambda_1} + 1346\Delta_{\lambda_2} - 1281\Delta_{\lambda_3}$. При $|\Delta_{\lambda_1}| \le \Delta_1$, $|\Delta_{\lambda_2}| \le \Delta_2$, $|\Delta_{\lambda_3}| \le \Delta_3$ оценка погрешности имеет вид: $\Delta_{a_{23}} \le 56\Delta_1 + 1346\Delta_2 + 1281\Delta_3$.

Таким образом, можно сделать вывод, что, как правило, используя первые собственные значения мы получаем более точное решение задачи.

В первой главе также были приведены контрпримеры, показывающие, что двух собственных значений для однозначного решения задачи не достаточно. Проведена численная фильтрация результатов примеров, построены соответствующие графики.

Контрпример 1. Краевые условия

1. $y'''(1) - 0{,}0200\lambda^4 y(1) = 0, \quad y''(1) - 0{,}0700\lambda^4 y'(1) = 0,$

2. $y'''(1) - 0{,}1531\lambda^4 y(1) = 0, \quad y''(1) - 0{,}1138\lambda^4) y'(1) = 0$

– различны, однако соответствующие задачи имеют одинаковые первые два собственных значения $\lambda_1 = 1{,}6710, \lambda_2 = 2{,}7643$.

Если конец стержня содержит и инерционный элемент, и упругое закрепление, то краевые условия не записываются случаями 1-10 и для однозначной идентификации краевых условий трех собственных значений не достаточно (см. контрпримеры 2, 3, 4).

В первой главе также решена задача определения двух параметров закрепления правого конца стержня по трем собственным частотам его колебаний. Рассматривается два вида закрепления: инерционный элемент на конце и упругое закрепление стержня. В первом случае требуется найти массу и момент инерции концевого груза, а во втором – два коэффициента жесткости пружинок. С помощью метода введения дополнительной неизвестной величины получены формулы для нахождения неизвестных параметров. Приведены численные примеры решения задач и контрпримеры, показывающие, что при использовании двух собственных значений задачи возникает двойственность ее решения.

Во **второй главе** рассматривается однородная балка Эйлера–Бернулли левый конец которой заделан, а на правом конце реализуются общие краевые условия. Показано, что общие краевые условия правого конца балки Эйлера–Бернулли однозначно определяются по пяти собственным частотам ее колебаний. Решена задача однозначного определения четырех параметров правого конца балки Эйлера–Бернулли по пяти собственным частотам ее колебаний. Изложен новый метод решения задачи идентификации краевых условий, основанный на сведении к нелинейной системе, имеющей единственное решение. Этот метод позволяет находить единственное решение по минимальному числу собственных частот.

Рассматривается однородная балка Эйлера–Бернулли длиной L, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F, левый конец которой заделан; на правом конце сосредоточен груз массой m_1 и моментом инерции I_1. Груз упруго закреплен на пружинках с жесткостями c_1 и c_2, препятствующих вертикальному смещению балки (c_1) и ее повороту (c_2). Требуется найти m_1, I_1, c_1, c_2 по собственным частотам колебаний балки.

Начальные условия при $t = 0: \quad U(X,0) = f(X), \quad \frac{\partial U(X,0)}{\partial t} = g(X)$, где $f(X)$, $g(X)$ - функции, определяющие начальное положение оси стержня. Краевые условия имеют вид:

$$\begin{gathered} X = 0: \quad U = 0, \ \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \\ X = L: \quad EI\frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + c_1 U = -m_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad EI\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + c_2 \frac{\partial U}{\partial X} = -I_1 \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2}. \end{gathered} \tag{8}$$

Для решения используется уравнение свободных изгибных колебаний стержня (1). Вводя обозначения $x = X/L$, $u = U/L$ и сделав замену $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$, уравнение (1) с краевыми условиями (8) к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad Y_1(y) = y(0) = 0, \quad Y_2(y) = y'(0) = 0; \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Y_3(y) &= y'''(1) + (a_{15} - a_{16}\lambda^4) y(1) = 0, \\ Y_4(y) &= y''(1) + (a_{23} - a_{24}\lambda^4) y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $a_{15} = (c_1 L^3)/(EI) \geq 0$, $a_{16} = m_1/(\rho F L) \geq 0$, $a_{23} = (c_2 L)/(\rho F L) \geq 0$, $a_{24} = I_1/(\rho F L^3) \geq 0$, $\lambda^4 = \rho F L^4 \omega^2/(EI)$. Требуется по собственным значениям λ_k краевой задачи (9), (10) найти неизвестные коэффициенты $a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24}$.

В решении задачи используется характеристический определитель задачи (9), (10):

$$\begin{aligned} &\Delta(\lambda) \equiv -f_0(\lambda) + a_{15} f_1(\lambda) + a_{16} f_2(\lambda) + a_{23} f_3(\lambda) + a_{24} f_4(\lambda) + \\ &+(a_{15} a_{24} + a_{16} a_{23}) f_5(\lambda) + a_{15} a_{23} f_6(\lambda) + a_{16} a_{24} f_7(\lambda), \end{aligned} \tag{11}$$

где $f_0(\lambda) = (1 + \cos\lambda \cosh\lambda)/2$, $f_1(\lambda) = (-\cos\lambda \sinh\lambda + \sin\lambda \cosh\lambda)/(2\lambda^3)$, $f_2(\lambda) = -\lambda^4 f_1(\lambda)$, $f_3(\lambda) = -(\sin\lambda \cosh\lambda + \cos\lambda \sinh\lambda)/(2\lambda)$, $f_4(\lambda) = -\lambda^4 f_3(\lambda)$, $f_5(\lambda) = (\cos\lambda \cosh\lambda - 1)/2$, $f_6(\lambda) = -f_5(\lambda)/\lambda^4$, $f_7 = -\lambda^4 f_5(\lambda)$.

Подставим собственные значения λ_k задачи (9), (10) в (11), получаем систему уравнений для отыскания неизвестных a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24}:

$$\begin{gathered} a_{15}f_1(\lambda_k)+a_{16}f_2(\lambda_k)+a_{23}f_3(\lambda_k)+a_{24}f_4(\lambda_k)+ \\ +(a_{15}a_{24}+a_{16}a_{23})f_5(\lambda_k)+a_{15}a_{23}f_6(\lambda_k)+a_{16}a_{24}f_7(\lambda_k)=f_0(\lambda_k). \end{gathered} \tag{12}$$

Сведем эту систему нелинейных уравнений к системе однородных уравнений. Для этого в (12) перенесем $a_{15}f_1(\lambda_k)$ и $a_{16}f_2(\lambda_k)$ в правую часть и подставим первые пять собственных значений задачи (9), (10). Получим следующую систему пяти уравнений:

$$\begin{gathered} a_{23}f_3(\lambda_k)+a_{24}f_4(\lambda_k)+(a_{15}a_{24}+a_{16}a_{23})f_5(\lambda_k)+a_{15}a_{23}f_6(\lambda_k)+ \\ +a_{16}a_{24}f_7(\lambda_k)=f_0(\lambda_k)-a_{15}f_1(\lambda_k)-a_{16}f_2(\lambda_k), \quad k=1{,}2,...,5. \end{gathered} \tag{13}$$

Определитель данной системы имеет вид:

$$\Delta_0=\det(\|\ f_3(\lambda_j)\ \ f_4(\lambda_j)\ \ f_5(\lambda_j)\ \ f_6(\lambda_j)\ \ f_7(\lambda_j)\ \|_{j=1,2,3,4,5}). \tag{14}$$

Если первый столбец матрицы системы заменить столбцом свободных членов $f_0(\lambda_1)-a_{15}f_1(\lambda_1)-a_{16}f_2(\lambda_1),...,f_0(\lambda_5)-a_{15}f_1(\lambda_5)-a_{16}f_2(\lambda_5)$, получим $\Delta_1=\Delta_0^1-a_{15}\Delta_1^1-a_{16}\Delta_2^1$, где

$$\Delta_i^1=\det\left(\|\ f_i(\lambda_j)\ \ f_4(\lambda_j)\ \ f_5(\lambda_j)\ \ f_6(\lambda_j)\ \ f_7(\lambda_j)\ \|_{j=1,2,3,4,5}\right), i=0,1,2. \tag{15}$$

Аналогично выписываются определители, которые получились после замены других столбцов: второго – $\Delta_2=\Delta_0^2-a_{15}\Delta_1^2-a_{16}\Delta_2^2$, третьего – $\Delta_3=\Delta_0^3-a_{15}\Delta_1^3-a_{16}\Delta_2^3$, четвертого – $\Delta_4=\Delta_0^4-a_{15}\Delta_1^4-a_{16}\Delta_2^4$ и пятого – $\Delta_5=\Delta_0^5-a_{15}\Delta_1^5-a_{16}\Delta_2^5$, где

$$\begin{aligned} \Delta_i^2&=\det\left(\|\ f_3(\lambda_j)\ \ f_i(\lambda_j)\ \ f_5(\lambda_j)\ \ f_6(\lambda_j)\ \ f_7(\lambda_j)\ \|_{j=1,2,3,4,5}\right), i=0,1,2, \\ \Delta_i^3&=\det\left(\|\ f_3(\lambda_j)\ \ f_4(\lambda_j)\ \ f_i(\lambda_j)\ \ f_6(\lambda_j)\ \ f_7(\lambda_j)\ \|_{j=1,2,3,4,5}\right), i=0,1,2, \\ \Delta_i^4&=\det\left(\|\ f_3(\lambda_j)\ \ f_4(\lambda_j)\ \ f_5(\lambda_j)\ \ f_i(\lambda_j)\ \ f_7(\lambda_j)\ \|_{j=1,2,3,4,5}\right), i=0,1,2, \\ \Delta_i^5&=\det\left(\|\ f_3(\lambda_j)\ \ f_4(\lambda_j)\ \ f_5(\lambda_j)\ \ f_6(\lambda_j)\ \ f_i(\lambda_j)\ \|_{j=1,2,3,4,5}\right), i=0,1,2. \end{aligned} \tag{16}$$

Если $\Delta_0\neq 0$, то по формулам Крамера получаем решение системы (13):

$$a_{23}=\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\quad a_{24}=\frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \tag{17}$$

$$a_{15}a_{24} + a_{16}a_{23} = \frac{\Delta_3}{\Delta_0}, \quad a_{15}a_{23} = \frac{\Delta_4}{\Delta_0}, \quad a_{16}a_{24} = \frac{\Delta_5}{\Delta_0}. \qquad (18)$$

Подставляя (17) в (18), получаем три квадратных уравнения от двух неизвестных a_{15} и a_{16}, сократив в каждом из этих уравнений знаменатель Δ_0, имеем:

$$\Delta_1^1 (a_{15})^2 - \left(\Delta_0^1 + \Delta_1^4\right) a_{15} - \Delta_2^4 a_{16} + \Delta_2^1 a_{15} a_{16} + \Delta_0^4 = 0, \qquad (19)$$

$$\Delta_2^2 (a_{16})^2 - \left(\Delta_0^2 + \Delta_2^5\right) a_{16} - \Delta_1^5 a_{15} + \Delta_1^2 a_{15} a_{16} + \Delta_0^5 = 0, \qquad (20)$$

$$\Delta_1^2 (a_{15})^2 + \Delta_2^1 (a_{16})^2 - \left(\Delta_0^2 + \Delta_1^3\right) a_{15} - \left(\Delta_0^1 + \Delta_2^3\right) a_{16} + \left(\Delta_1^1 + \Delta_2^2\right) a_{15} a_{16} + \Delta_0^3 = 0. \qquad (21)$$

Если эта система имеет единственное решение, то коэффициенты a_{23} и a_{24} находятся единственным образом подстановкой найденных значений a_{15} и a_{16} в (17). Таким образом, верна

Теорема 2. *Пусть λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 являются различными собственными значениями краевой задачи (9), (10). Если определитель (14) отличен от нуля и система трех уравнений (19)–(21) от двух неизвестных a_{15} и a_{16} имеет единственное решение, то по значениям λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 коэффициенты a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24} определяются однозначно.*

С помощью пакета аналитических вычислений коэффициенты a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24} удобнее находить следующим образом: сначала решается система двух уравнений (19), (21) от двух неизвестных a_{15} и a_{16}. Она имеет четыре решения. Затем решается система уравнений (20), (21), которая также имеет четыре набора решений. Пересечением наборов решений первой и второй систем уравнений является единственный набор решений a_{15} и a_{16}. Для определения коэффициентов a_{23} и a_{24} с помощью значений a_{15} и a_{16} используются формулы (17).

Показано на контрпримере, что для однозначной идентификации четырех коэффициентов a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24} четырех собственных значений недостаточно.

Контрпример 2. Краевые условия

1. $y''(1) + (147{,}3199 - 1{,}9842\lambda^4)y'(1) = 0$,
$y''(1) + (4{,}4494 - 0{,}0662\lambda^4)y'(1) = 0$,

2. $y'''(1) + (0{,}0500 - 2{,}0000\lambda^4)y(1) = 0$,
$y''(1) + (3{,}0000 - 0{,}0700\lambda^4)y'(1) = 0$

– различны, однако соответствующие задачи имеют одинаковые первые четыре собственных значения: $\lambda_1 = 3{,}0465$, $\lambda_2 = 4{,}7828$, $\lambda_3 = 7{,}8150$, $\lambda_4 = 10{,}9588$.

На основе теоремы 2 доказана следующая общая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5$ *являются различными собственными значениями задачи (3)–(5), где* $Y_3(y)$ *и* $Y_4(y)$ *представляются в общей форме (5). Если* $\operatorname{rank} A = 2$, *то краевые условия (5) однозначно определяются по собственным значениям* $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5$.

Во второй части второй главы рассмотрены два частных случая, когда на конце стержня сосредоточен груз, упруго закрепленный только на одной пружинке. В первом случае требуется найти массу, момент инерции груза и коэффициент жесткости пружинки, которая препятствует вертикальному смещению балки. Во втором – массу, момент инерции груза, а также коэффициент жесткости пружинки, препятствующей повороту балки. Показано, что для однозначного определения трех коэффициентов $a_{15},\ a_{16},\ a_{24}$ или $a_{16},\ a_{16},\ a_{24}$, достаточно использования четырех собственных значений краевой задачи, а при использовании трех собственных значений, возникает двойственность решения задачи.

Контрпример 3. Краевые условия

1. $y'''(1) + (2{,}6098 - 0{,}6985\lambda^4)y(1) = 0,\quad y''(1) - 0{,}0948\lambda^4 y(1) = 0,$
2. $y'''(1) + (0{,}020 - 0{,}7000\lambda^4)y(1) = 0,\quad y''(1) - 0{,}0990\lambda^4 y(1) = 0$

– различны, однако соответствующие задачи имеют одинаковые первые три собственных значения : $\lambda_1 = 2{,}2896,\ \lambda_2 = 4{,}4153,\ \lambda_3 = 7{,}6492.$

Контрпример 4. Краевые условия

1. $y'''(1) - 2{,}6400\lambda^4 y(1) = 0,\quad y''(1) + (0{,}18000 - 0{,}0840\lambda^4)y(1) = 0,$
2. $y'''(1) - 0{,}1647\lambda^4 y(1) = 0,\quad y''(1) + (0{,}2996 - 0{,}0043\lambda^4)y(1) = 0$

– различны, однако соответствующие задачи имеют одинаковые первые три собственных значения : $\lambda_1 = 2{,}4226,\ \lambda_2 = 6{,}4382,\ \lambda_3 = 10{,}1171.$

Также во второй главе приведено описание разработанной программы для идентификации закрепленности и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний. Показаны основные возможности, особенности, а также приведены скриншоты окон. Программа разработана в среде Maple.

В **третьей главе** рассматривается конечная однородная балка Эйлера–Бернулли с шарнирно закрепленными концами, лежащая на упругом основании. Упругое основание представляет собой систему не связанных между собой пружин, опирающихся на жесткое горизонтальное основание. Цель данной главы – по собственным частотам свободных изгибных колебаний балки определить коэффициент пропорциональности между нагрузкой и деформацией, который называется коэффициентом постели. Показано, что коэффициент податливости основания можно определить по одной собственной частоте колебаний балки. Проведена численная фильтрация результата примера третьей главы, построен соответствующий график и найдено эмпирическое число обусловленности.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

1. Предложена новая математическая модель краевых условий в виде матрицы, задаваемой с точностью до линейных преобразований строк. На основе этой математической модели решены следующие задачи:

– задача определения вида и параметров одного из десяти краевых условий стержня (заделка, свободное опирание, свободный конец, плавающая заделка, пять видов упругого закрепления, инерционный элемент на конце) по трем собственным частотам колебаний;

– задача определения вида и параметров одного из одиннадцати видов краевых условий стержня (добавлен случай когда на конце стержня сосредоточен груз упруго закрепленный на двух пружинках) по пяти собственным частотам колебаний; рассмотрены также два частных случая, когда концевой груз закреплен на одной из двух пружинок;

– задача определения коэффициента податливости упругого основания балки по одной собственной частоте колебаний (п.1 паспорта специальности 05.13.18).

2. Для решения задач разработаны новые численно-аналитические методы: метод дополнительной неизвестной величины, метод выбора альтернативных решений на основе соотношений Плюккера, метод сведения к нелинейной системе, имеющей единственное решение. Проведена численная фильтрация результатов приведенных в работе примеров. Найдено минимальное число собственных частот для решения соответствующих задач идентификации. Доказано, что для однозначной идентификации n $(n = 2,\ 3,\ 4)$ параметров закрепления одного из концов стержня требуется $n+1$ собственная частота. Приведены контрпримеры, показывающие, что использование меньшего числа собственных частот не достаточно (п.2 паспорта специальности 05.13.18).

3. Разработан комплекс программ для численного решения перечисленных в п. 1 задач идентификации вида и параметров закрепления конца стержня по минимальному числу собственных частот колебаний (п.4 и п.8 паспорта специальности 05.13.18).

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в изданиях, индексируемых в международной базе SCOPUS

1. Аитбаева, А.А. Об однозначности определения вида краевых условий на одном из концов стержня по трем собственным частотам его колебаний / А.А. Аитбаева, А.М. Ахтямов // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80. – Вып. 3. – С. 388-394.

2. Аитбаева, А.А., Идентификация закрепленности и нагруженности одного из концов балки Эйлера–Бернулли по собственным частотам ее колебаний / А.А. Аитбаева, А.М. Ахтямов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2017. – Т. 20. – 1(69). – С 3-10.

Статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ

3. Ахтямов, А.М. Об определении закрепления нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний / А.М. Ахтямов, А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева), А.В. Муфтахов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 114-129

4. Ахтямов, А.М. Об однозначности идентификации параметров упругого закрепления и сосредоточенного инерционного элемента / А.М. Ахтямов, А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева) // Вычислительная механика сплошных сред. – Пермь, 2013, – Т. 6. – 1. – С. 62-70

Зарегистрированные программные продукты

5. Аитбаева, А.А. «Идентификация закрепленности и нагруженности стержней и балок по собственным частотам их колебаний» / А.А. Аитбаева // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование. – 2015. – 12 (79). – С. 51-52. – Свидетельство о регистрации электронного ресурса 21572 от 29.12.2015.

Статьи, опубликованные в других изданиях

6. Ахтямов, А.М. Об однозначности идентификации сосредоточенного инерционного элемента на одном из концов стержня / А.М. Ахтямов, А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева) // Вестник Башкирского университета. – 2013. – 1. – С. 7-11.

7. Aitbaeva, A.A. Determination of the Type and Parameters of a Beam End Fastening / A.A. Aitbaeva, A.M. Akhtyamov // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2017. – V. 7. – 1.

8. Аитбаева, А.А. Определение коэффициента постели упругого основания балки с шарнирно закрепленными концами по собственным частотам ее колебаний / А.А. Аитбаева // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2016. – 4. – С. 23-26.

9. Аитбаева, А.А. Идентификация коэффициента жесткости пружины, закрепленной на конце балки Эйлера–Бернулли, а также массы и момента инерции груза сосредоточенного на этом конце / А.А. Аитбаева // Обратные краевые задачи и их приложения: материалы конференции (г. Казань, 20-24 октября, 2014г.) [Электронный ресурс]. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.

10. Аитбаева, А.А. Об однозначности определения краевого условия на одном из концов стержня по собственным частотам его колебаний / А.А. Аитбаева, А.М. Ахтямов, А.В. Муфтахов // Обратные краевые задачи и их приложения: материалы конференции (г. Казань, 20-24 октября, 2014г.) [Электронный ресурс]. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.

11. Аитбаева, А.А. Определение коэффициента постели по собственным частотам колебаний балки / А.А. Аитбаева // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН; под ред. С.Ф. Урманчеева. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2014. – Вып. 10. – С. 13-15.

12. Аитбаева, А.А. Метод дополнительных неизвестных для определения параметров концевого груза и параметров упругого закрепления балки / А.А. Аитбаева // Математическое моделирование на основе статистических методов: Материалы Всероссийской научно-практической конференции; под общей редакцией С.М. Усманова. – Бирск: Бирск. Фил. Баш. гос. ун-та., 2015. – С. 84-90.

13. Аитбаева, А.А. Безразборное определение параметров упругого закрепления стержня / А.А. Аитбаева // Современные проблемы науки и образования в техническом вузе: материалы II Международной научно-практической конференции (25-27 июня 2015 года, г. Стерлитамак). Часть 2. – Уфа: УГАТУ, 2015. – С. 3-6.

14. Аитбаева, А.А. Обратная задача для балки Эйлера–Бернулли / А.А. Аитбаева // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы IV Всерос. науч.-практ. конф., по- священной 75-летию физико-математического факультета, 16-19 декабря 2015 г., г. Стерлитамак; отв. ред. С.А. Мустафина. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2015. – С. 10-15.

15. Аитбаева, А.А. Неразрушающая диагностика закрепления одного из концов стержня / А.А. Аитбаева // Мавлютовские чтения: материалы Российской научно-технической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения член-корр. РАН, д-ра техн. наук, профессора Р.Р. Мавлютова. В 7 т. Т.3. Механика процессов деформирования и разрушения вязкоупругопластических тел / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т., 2016. – С. 10-13.

16. Аитбаева, А.А. Обратная спектральная задача для однородной балки Эйлера–Бернулли / А.А. Аитбаева // Математическое моделирование процессов и систем: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А.Н. Тихонова, 17-19 ноября 2016 г., г. Стерлитамак. Часть I; отв. ред. С.А. Мустафина. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 59-64.

17. Ахтямова, А.А. Однозначность определения параметров закрепления струны по собственным частотам ее колебаний / А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева) // Сборник трудов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Математика. – Уфа РИЦ БашГУ, 2009. – Т. 1. – С. 56-60.

18. Ахтямова, А.А. Определение краевого условия по двум собственным частотам / А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева) // Сборник трудов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Математика. – Уфа, 2010. – Т. 1. – С. 18-21.

19. Ахтямова, А.А. Идентификация массы и момента инерции груза, сосредоточенного на конце балки / А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева) // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: Материалы Международной конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. Математика. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2011. – Т. 1. – С. 17-21.

20. Ахтямова, А.А. Об однозначности идентификации массы и момента инерции груза, сосредоточенного на конце балки / А.А. Ахтямова (А.А. Аитбаева) // Сборник трудов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Математика. – Уфа: БашГУ, 2012. – Т. 1. – С. 19-26.

Диссертант