Белогрудов Александр Николаевич

УГАТУ

доцент кафедры специальных глав математики

Стереометрия.

Часть 3.

2018г.

Типы рассматриваемых задач:

- стереометрические задачи на доказательство утверждений;

- расчетные задачи.

Ресурсы:

http://alexlarin.net/

http://reshuege.ru/

- **«ЕГЭ-2016. Математика. Типовые тестовые задания», под ред. И.В. Ященко – М.: «Экзамен», 2016г.**

Вспомогательные теоремы и свойства:

Теорема (о 3-х перпендикулярах) Если проекция наклонной, проведенной к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна той же прямой.

Теорема (обратная о 3-х перпендикулярах) Если наклонная, проведенная к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и проекция наклонной перпендикулярна той же прямой.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости) Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся в плоскости прямым, то она перпендикулярна и самой плоскости.

Свойство прямой, перпендикулярной плоскости Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности плоскостей) Если одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то плоскости перпендикулярны.

Измерение углов:

Угол между скрещивающимися прямыми Угол между скрещивающимися прямыми измеряется как угол между одной из прямых и пересекающейся с ней прямой, параллельной второй из скрещивающихся.

Угол между прямой и плоскостью Угол между прямой и плоскостью измеряется как угол между самой прямой (как наклонной к плоскости) и проекцией её на эту плоскость.

Угол между плоскостями Угол между плоскостями измеряется линейным углом между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными их общей линии пересечения.

Пример 1. (Типовые тестовые задания, под ред. И.В. Ященко 2016г.)
Дан куб $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.
а) Докажите, что прямая $\boldsymbol{BD_1}$ перпендикулярна плоскости $\boldsymbol{ACB_1}$.
б) Найдите угол между плоскостями $\boldsymbol{AD_1C_1}$ и $\boldsymbol{A_1D_1C}$.

(Ответ: $120°$)

Пример 2. (ЕГЭ-2017 г., основная волна**)**
В основании пирамиды $PABCD$ – трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.
а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.
б) Найдите объем $PKBC$, если $AB = BC = CD = 3$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 8.

(Ответ: 6 куб. ед.)

<u>Вспомогательные теоремы</u>

Свойство параллельных плоскостей при пересечении третьей плоскостью.
При пересечении двух параллельных плоскостей третья плоскость высекает на них параллельные прямые.

<u>Задачи на измерение расстояний.</u>

Пример 3. (ЕГЭ-2017 г., основная волна**)**
Основанием прямой треугольной призмы $A..C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, а боковая грань ACC_1A_1 является квадратом.
а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны;
б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 1$ и $BC = 4$.

(Ответ: $\frac{2}{3}$)

<u>Измерение расстояний:</u>

Расстояние от точки до плоскости Расстояние от точки до плоскости измеряется длинной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Расстояние от точки до прямой Расстояние от точки до прямой измеряется длинной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью измеряется длинной их общего перпендикуляра.

Расстояние между параллельными плоскостями Расстояние между плоскостями измеряется длинной их общего перпендикуляра.

Расстояние между скрещивающимися прямыми Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длинной их общего перпендикуляра.

Пример 4. (Типовые тестовые задания, под ред. И.В. Ященко. 2016 г.) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все ребра которой равны 4, точка N – середина ребра AC, точка O – центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды.
а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.
б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

(Ответ: 2)

Пример 5. (досрочный экз. 2016г., резервный день) В треугольной пирамиде ABCD двугранные углы при ребрах AD и BC равны. AB=BD=DC=AC=5.
а) Докажите, что AD=BC.
б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

(Ответ: $\frac{10\sqrt{15}}{3}$)

Пример 6. (досрочный экз. 2016г., основной день) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = A_1N = C_1K = 1$.
а) Пусть L - точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что MNKL - квадрат
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

(Ответ: 55 кв.ед.)

<u>Другие задачи</u>

Пример 7. (Задание 14, ЕГЭ 2016г., основная волна)
В правильной четырехугольной призме $\boldsymbol{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ ребро основания равно 8, а высота призмы 4. На ребрах $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{C_1D_1}$ соответственно выбраны точки $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ так, что $\boldsymbol{BK} = 4$, а $\boldsymbol{C_1L} = 6$. Плоскость $\boldsymbol{\gamma}$, параллельна прямой $\boldsymbol{BD}$ и содержит точки $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$.
а) Докажите, что прямая $\boldsymbol{AC_1}$ перпендикулярна плоскости $\boldsymbol{\gamma}$.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $\boldsymbol{\gamma}$.

Пример 8. (30 вариантов типовых тестовых заданий, под ред. И.В. Ященко. 2016 г.) В пирамиде $SABC$ известны длины ребер $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$. Точка K – середина ребра BC.
а) Докажите, что плоскость SAK перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC.

(Ответ: $2\sqrt{7}$)

Пример 9. (alexlarin.net, вар. 139) В основании пирамиды $PABCD$ лежит равнобедренная трапеция с острым углом 45°. Боковые грани PAB и PCD перпендикулярны основанию пирамиды.
а) Докажите, что плоскости PAB и PCD перпендикулярны.
б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что $BC = 6$, $AD = 12$, а объём пирамиды равен 27.

Пример 10. (alexlarin.net, вар. 154) В Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
А) Докажите, что каждая из плоскостей BDA_1 и B_1D_1C перпендикулярна прямой AC_1.
Б) Найдите объем части куба, заключенной между плоскостями BDA_1 и B_1D_1C, если известно, что отрезок диагонали AC_1, заключенный между этими плоскостями, имеет длину $\sqrt{3}$.

Пример 11. Точка E – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
а) Докажите, что сечение куба плоскостью DEB_1 является ромбом.
б) Найдите угол между прямыми DE и BD_1.

(Ответ: $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$)