

**Белогрудов Александр Николаевич**

**УГАТУ**

**доцент кафедры специальных глав математики**

**Стереометрия.**

**Часть 2.**

**2018г.**

### **Типы рассматриваемых задач:**

- взаимное расположение элементов фигур в пространстве;
- расчетные задачи по вычислению расстояний между элементами фигур.

### **Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве**

#### Прямые в пространстве:

- параллельны,
- пересекаются,
- скрещиваются.

#### Плоскости в пространстве:

- параллельны,
- пересекаются.

#### Прямая и плоскость в пространстве:

- параллельны (и не имеют общих точек),
- прямая пересекает плоскость (одна общая точка),
- прямая принадлежит плоскости.

### **Измерение расстояний в пространстве:**

**Расстояние от точки до плоскости** Расстояние от точки до плоскости измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

**Расстояние от точки до прямой** Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

**Расстояние между скрещивающимися прямыми** Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной их общего перпендикуляра.

**Расстояние между параллельными прямой и плоскостью** Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью измеряется длиной их общего перпендикуляра.

**Расстояние между параллельными плоскостями** Расстояние между плоскостями измеряется длиной их общего перпендикуляра.

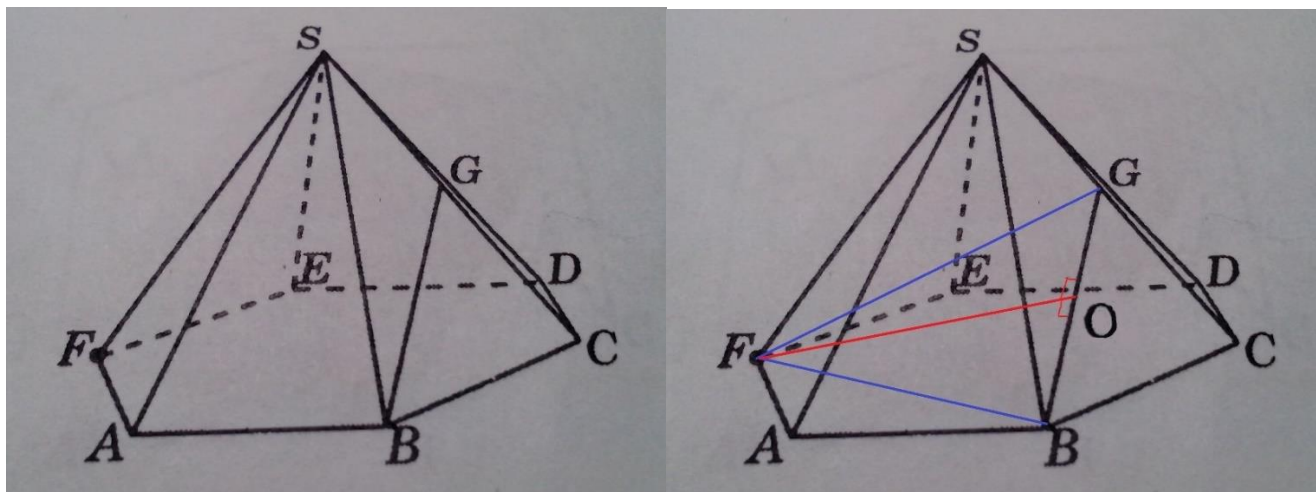
## Задачи на измерение расстояний.

### Пример 1.

В правильной 6-ти угольной пирамиде  $SABCDEF$ , ребро основания которой равно 1, а боковое ребро – 2, найдите расстояние от точки  $F$  до прямой  $BG$ , где  $G$  – середина ребра  $SC$ .

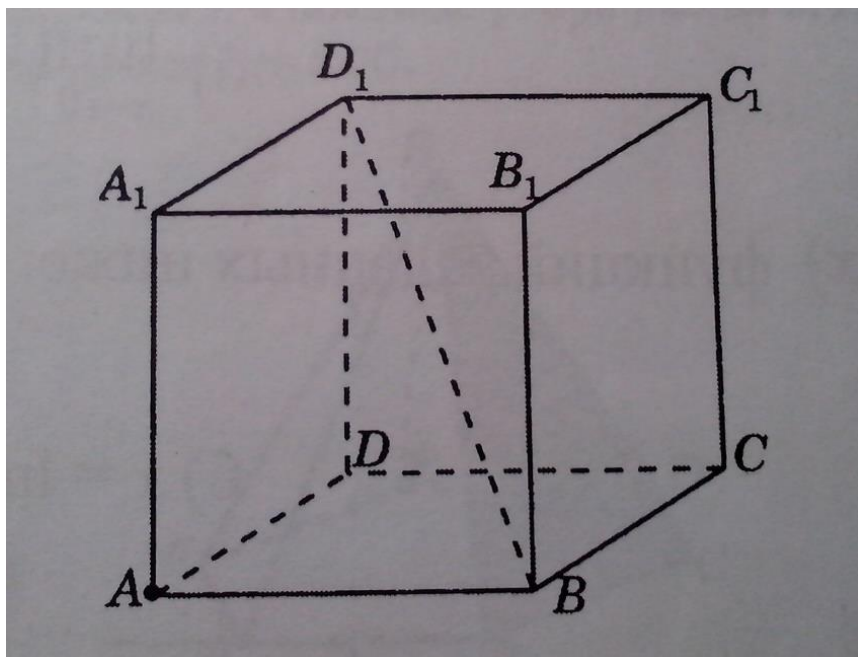
(Ответ:  $\frac{\sqrt{42}}{4}$ )

Рисунок с доп. построением:



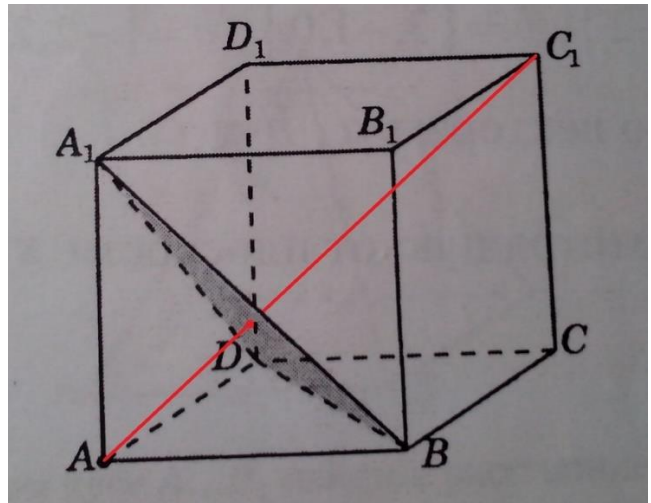
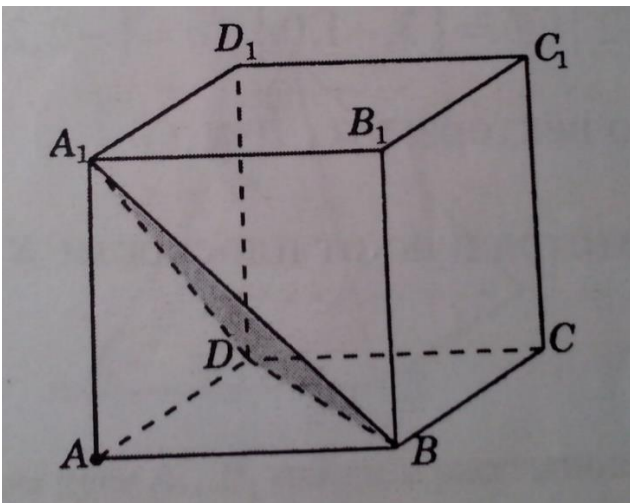
**Пример 2.** В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD_1$ . (Ответ:  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ )

Рисунок:

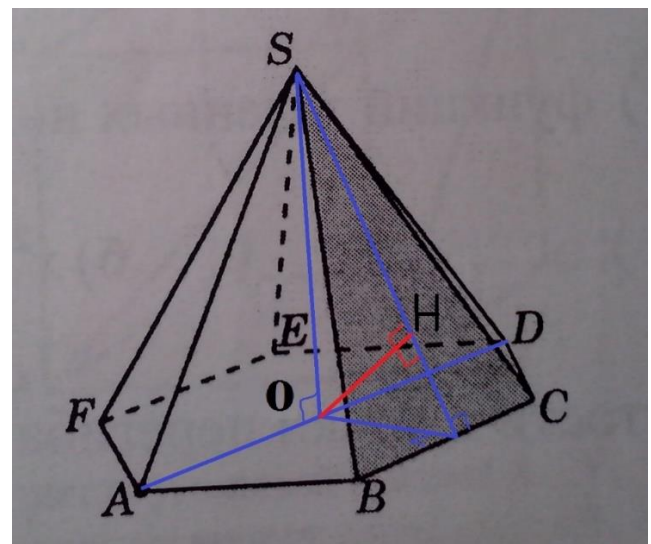
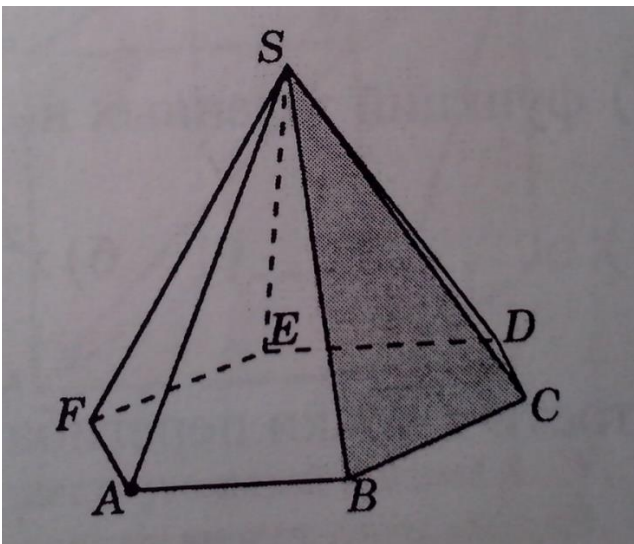


**Пример 3.** В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BDA_1$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ )

Рисунок с доп. построением:

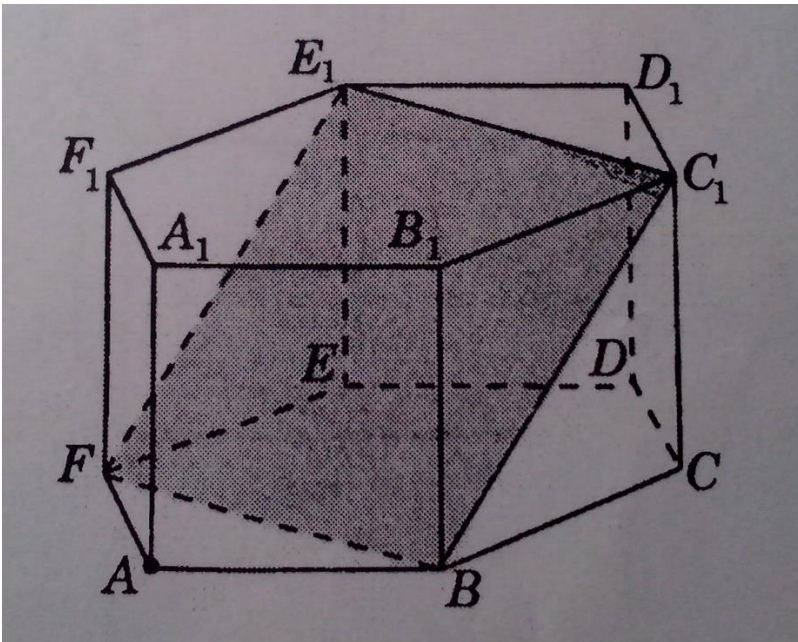


**Пример 4.** В правильной 6-ти угольной пирамиде  $SABCDEF$ , ребро основания которой равно 1, а боковое ребро – 2, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $SBC$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ) Рисунок с доп. построением:



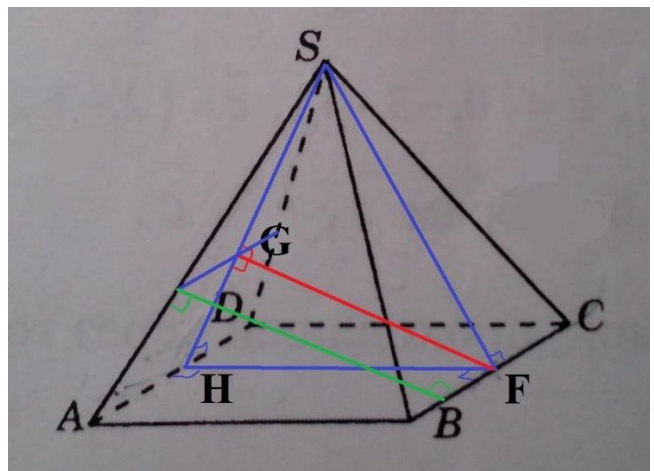
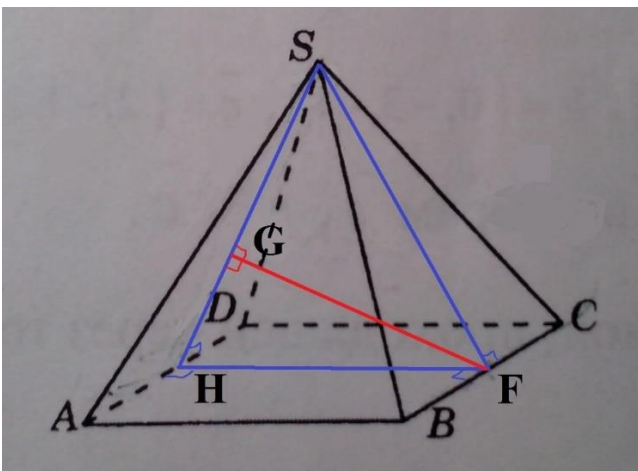
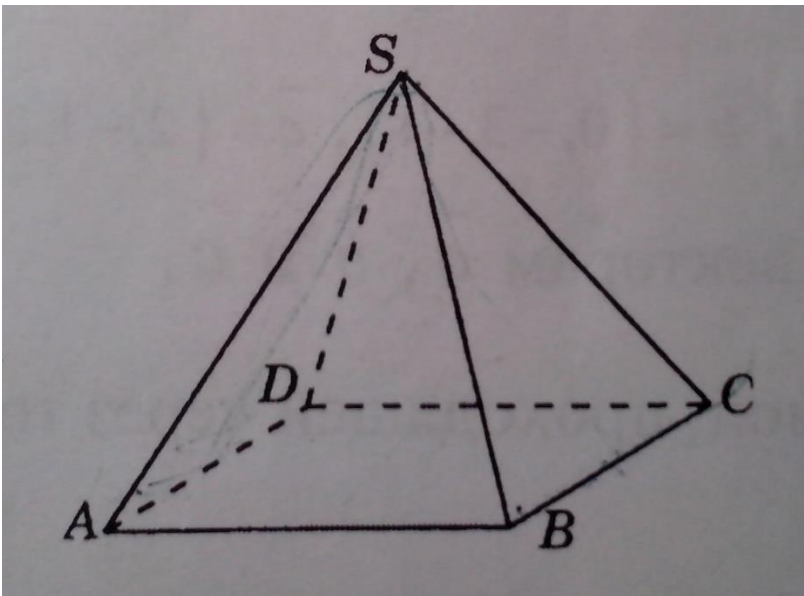
**Пример 5.** В правильной 6-ти угольной призме  $AB \dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ )

Рисунок:



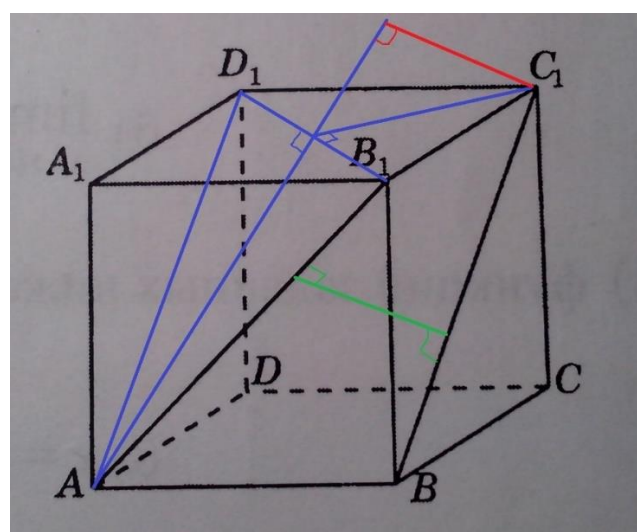
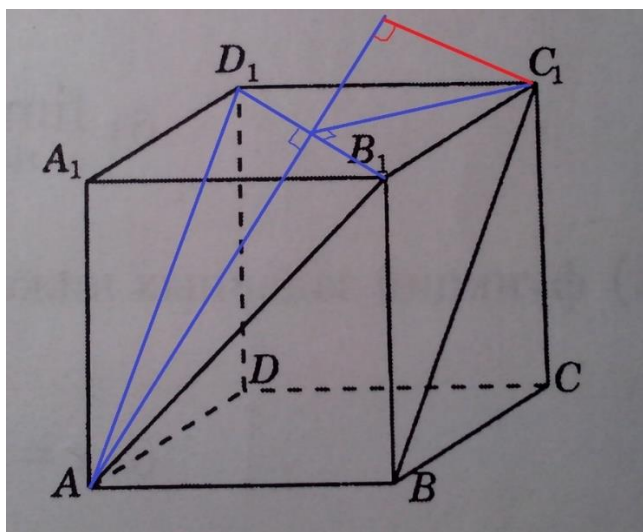
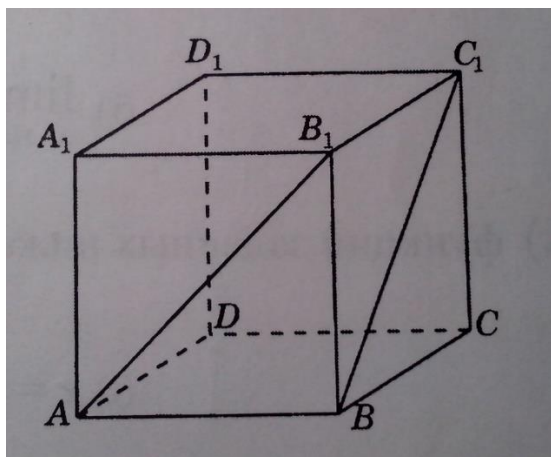
**Пример 6.** В правильной 4-х угольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $SA$  и  $BC$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ )

Рисунок с доп. построением:



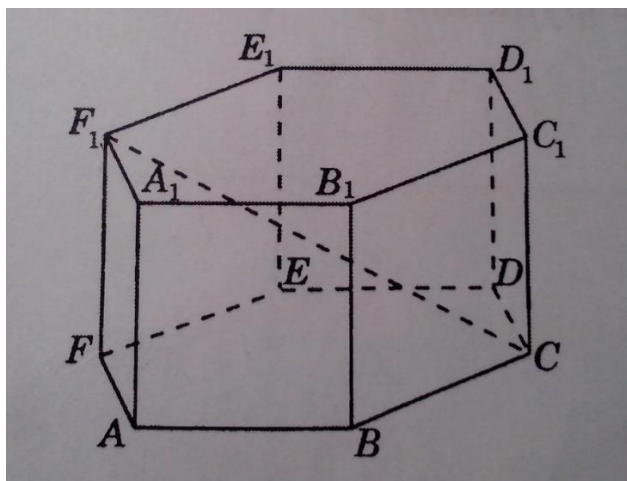
**Пример 7.** В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ )

Рисунок с доп. построением:



**Пример 8.** В правильной 6-ти угольной призме  $AB \dots F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $CF_1$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ )

Рисунок:



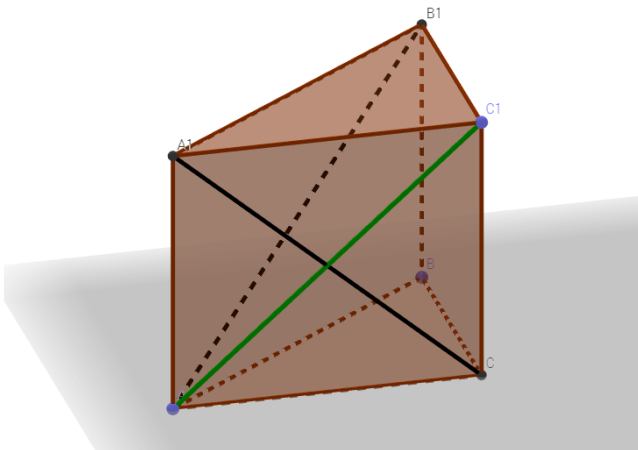
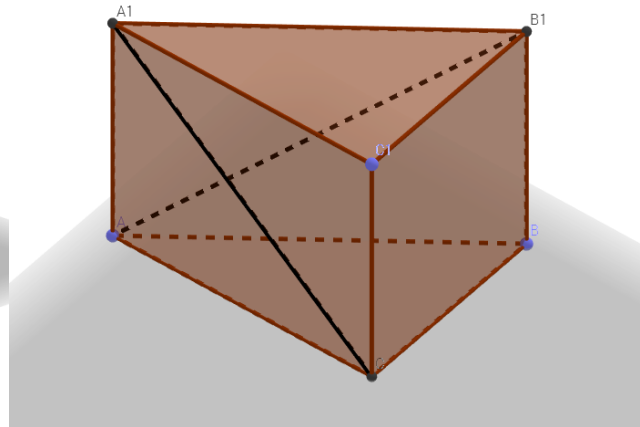
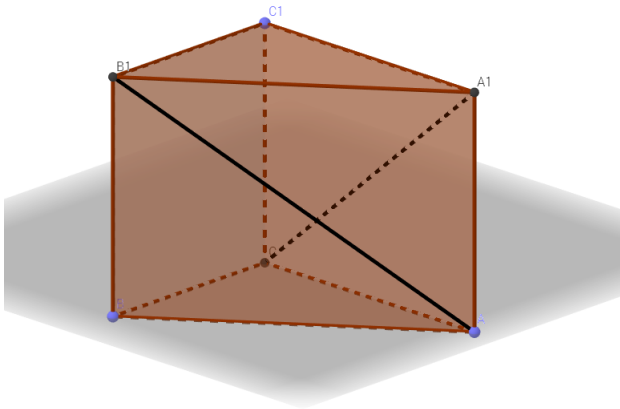
**Пример 9.** Основанием прямой треугольной призмы  $A_1B_1C_1ABC$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ , а боковая грань  $ACC_1A_1$  является квадратом.

а) Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны;

б) Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $AC = 4$  и  $BC = 7$ .

(Ответ:  $\frac{14\sqrt{2}}{9}$ )

Рисунок с доп. построением:



### Вспомогательные теоремы и свойства:

**Теорема (о 3-х перпендикулярах)** Если проекция наклонной, проведенной к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна той же прямой.

**Теорема (обратная о 3-х перпендикулярах)** Если наклонная, проведенная к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и проекция наклонной перпендикулярна той же прямой.

**Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости)** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся в плоскости прямым, то она перпендикулярна и самой плоскости.

**Свойство прямой, перпендикулярной плоскости** Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

**Теорема (признак перпендикулярности плоскостей)** Если одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то плоскости перпендикулярны.

**Свойство параллельных плоскостей при пересечении третьей плоскостью.** При пересечении двух параллельных плоскостей третья плоскость высекает на них параллельные прямые.