Некоторые приемы решения задач типа С7(19) ЕГЭ

Белогрудов Александр Николаевич

доцент кафедры специальных глав математики УГАТУ

кандидат физико-математических наук

2015г.

1. В группе одной из социальных сетей состоят одинаковое количество юношей и девушек. Оказалось, что к некоторому моменту времени каждый юноша отправил или 4 или 21 сообщение девушкам, причем и тех, и других юношей было не менее двух и они могли отправлять по нескольку сообщений девушкам.
а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила одинаковое количество сообщений?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что у каждой из них одинаковое количество сообщений?
в) Если известно, что все девушки получили разное количество сообщений(возможно, что кто-то не получил сообщений совсем), то каково наибольшее возможное количество девушек в группе?

2. а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?
б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?
в) Найти наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?

3. Из первых 22 натуральных чисел выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и подсчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят числа 27.
а) Могло ли оказаться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равна 170 и в каждой паре одно из чисел в три раза больше другого?
б) Может ли число k быть равным 11?
в) Найти наибольшее возможное значение числа k.

4. На окружности некоторым образом расставлены все натуральные числа от 1 до 21(каждое число ровно один раз). Для каждой пары соседних на окружности чисел найден модуль их разности.

а) Могло ли оказаться так, что все полученные модули разностей не меньше 11?
б) Могло ли оказаться так, что все полученные модули разностей не меньше 10?
в) Помимо полученных разностей соседних чисел рассмотрены все пары чисел, стоящих через одно и подсчитаны все модули их разностей. Для какого наибольшего целого k можно так расставить числа, чтобы все модули разностей были не меньше k?

5. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку - целое число от 0 до 12 включительно. Известно, что все оценки - разные числа. Один из способов оценки – найти среднее арифметическое всех оценок. Второй способ состоит в следующем: отбрасывается наибольшая и наименьшая оценки, а из оставшихся находится арифметическое среднее.
а) Может ли разность оценок, найденных первым и вторым способом равняться $\frac{1}{25}$?
б) Может ли разность оценок, найденных первым и вторым способом равняться $\frac{1}{35}$?
в) Каково наибольшее возможное значение разности оценок, найденных первым и вторым способом?

6. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их всевозможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в неубывающем порядке. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.
а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?
в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

7. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111?

8. Натуральные числа **a**, **b**, **c** и **d** удовлетворяют условию $a > b > c > d$.
а) Найдите числа a, b, c и d, если выполнены условия
$a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.
б) Может ли быть так, что
$a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?
в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа **a**.

9. Решить в целых числах уравнение

$$2^x - 15 = y^2.$$

10. Найти решения уравнений:
а) $[2x] = \{7x\}$;
б) $[2x] = 7x$;
в) $2x = \{7x\}$,
где $[x]$ – целая часть числа x, а $\{x\}$ – дробная часть числа.

11. Найти все решения уравнения $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}$,
где $[x]$ – целая часть числа x, а $\{x\}$ – дробная часть числа.

12. В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.
а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

13. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на 61).
а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.